[4] G.Ribakovs, A.A. Gundjian // J.of Phys.C, 1977, v.48, No. 11, p 4609-46011

[5] D. Genzov, E.Normantas // Phys. St. Sol. (b), 1976, v77, p.667-673.

[6] E. Normantas // FIP: 1982, v.16. B.4, p. 630-634; E.Normantas, D.Gentsov, M.Moker // ФТП, 1982, т.16, №12, стр.2222-2225.

[7] S.M. Ryvkin, I.Yaroshchetsky // In the book: "Problems of modern physics". L .: Science, 1980. p.262-268.

[8] F.V. Vasko // FIP, 1984, t.18, №1, p.86-92.

[9] V.I .Belinicher, FTT// 1981, vol. 23, No. 11, p. 3463-3465.

ЭВОЛЮЦИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА МЕЛКОВОДЬЕ ПОРОЖДАЕМОЙ ЦИКЛОНИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В АТМОСФЕРЕ.

Шарый Владимир Александрович
Кандидат физ.-мат.наук, доцент горного университета, г. Санкт-Петербург
Пайков Владимир Иванович
Кандидат физ.-мат.наук, доцент Донецкого Национального университета, г. Донецк

АННОТАЦИЯ: В работе исследуется эволюция гидравлической волны вблизи морского берега, возникающей в результате перемещения области высокого атмосферного давления в направлении побережья. В области быстрого изменения параметров движения выстраивается нелинейное решение задачи, которое затем сопрягается с линейным.

Ключевые слова. Гидравлическая волна. Высокое атмосферное давление.

ABSTRACT: The paper investigates the evolution of a hydraulic wave near the sea shore, which results from the displacement of a region of high atmospheric pressure in the direction of the coast. In the area of rapid changes in motion parameters, a non-linear solution of the problem is constructed, which then is coupled with a linear

Keywords. Hydraulic wave. High atmospheric pressure.

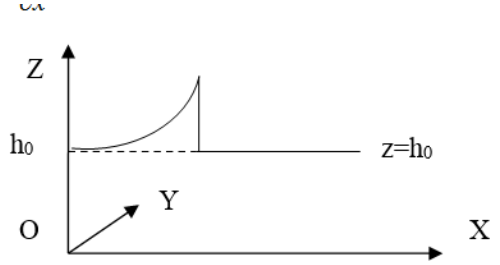
1. *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:*

Задача решается в рамках теории мелкой воды, в которой уравнения движения формально совпадают с уравнениями одномерной нестационарной газовой динамики с показателем адиабаты $\kappa = 2$. В эти уравнения вводится постоянное слагаемое, учитывающее суммарный эффект: силу сопротивления движению и силы ветра. Область высокого атмосферного давления над морской поверхностью, перемещающаяся в направлении берега, вызывает появление гидравлической волны в некоторый момент времени, который мы примем за начальный $t = 0$. Задача рассматривается в одномерном приближении. Предполагается что в некотором сечении гидравлической волны (перпендикулярном направлению распространения волны) известен закон изменения скорости частиц жидкости на некотором заданном промежутке времени. Примем упомянутое выше сечение волны за координатную плоскость OYZ, при этом ось OX рассматриваемой координатной системы совпадает с направлением перемещения волны, смотри рисунок.

Будем описывать движение жидкости в волне модифицированной системой уравнений общеизвестной теории мелкой воды:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2\cdot a}{\kappa - 1}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon\cdot a_0\cdot\mu \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v\cdot\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{(\kappa-1)\cdot a}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.2).$$



Здесь $v(x,t)$ - скорость движения частиц жидкости, $a(x,t)$ - скорость звука в теории мелкой воды, a_0 - начальное значение этой скорости, μ - заданная константа, учитывающая суммарный эффект: силы сопротивления движению и силы ветра, ε - малый параметр задачи $0 < \varepsilon \ll 1$, смысл которого будет пояснён ниже. Значение скорости звука a в рамках теории мелкой воды определяется соотношением:

$$a^2 = \frac{dP}{d(\rho\cdot l\cdot h)} \quad (1.3).$$

Здесь ρ - постоянная плотность жидкости, l - ширина гидравлической волны в направлении оси OY, $h = h(x,t)$ - высота гидравлической волны над прямолинейным морским дном. $P = P(x,t)$ - сила давления воды на сечение волны в точке x:

$$P = \int_0^h (p - p_0)\cdot dz = \int_0^h \rho\cdot l\cdot g\cdot(h - z)\cdot dz \quad (1.4).$$

Вычисления дают $P = P(x,t)$

$$P = \frac{\rho \cdot l \cdot g \cdot h^2}{2} \quad (1.5).$$

где $g = 9.8\, м/сек^2$ - ускорение свободного падения.

Из (1.3) и (1.5) получаем:

$$a^2 = g \cdot h \quad (1.6).$$

Для системы (1.1),(1.2) зададим граничные условия на $x = 0$:

$$v(0,t) = \begin{cases} \varepsilon \cdot a_0 \cdot \frac{t}{t_0}; & 0 < t < t_0 \\ v_0; & t_0 \le t \le k \cdot t_0 \\ \frac{(k+1)\cdot t_0 - t}{t_0}; & k \cdot t_0 \le t \le (k+1)\cdot t_0 \end{cases} \quad (1.7).$$

В (1.7) $t_0 > 0$, $k > 1$ - заданные константы, связанные с геометрией области высокого давления, $\varepsilon = \frac{v_0}{a_0}$, где $v_0 = v(0,t_0)$ максимальное значение скорости на заданном в (1.7) промежутке времени.

Так как в задаче присутствует малый параметр ε то очевидно что скорость звука a отличается от a_0 на малые порядка $O(\varepsilon)$, что позволяет положить:

$$a = a_0 \cdot (1 + \alpha(x,t)), \quad \alpha(x,t) = O(\varepsilon) \quad (1.8).$$

Аналогичным образом полагаем:

$$h = h_0 \cdot (1 + \eta(x,t)), \quad \eta(x,t) = O(\varepsilon) \quad (1.9)$$

Здесь $z = h_0$ уравнение невозмущенной поверхности жидкости. Разложим малые добавки $\alpha(x,t)$ и $\eta(x,t)$ в асимптотические ряды по ε:

$$\alpha(x,t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot \alpha_1(x,t) + \varepsilon^2 \cdot \alpha_2(x,t) + \ldots \quad (1.10)$$

$$\eta(x,t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot + v \cdot \eta_1(x,t) + \varepsilon^2 \cdot \eta_2(x,t) + \ldots \quad (1.11).$$

Коэффициенты асимптотических разложений (1.10), (1.11) имеют порядок $O(1)$. Из соотношений (1.6), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) следует что:

$$\frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1} = \eta_1 \quad (1.12)$$

2. *ЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ.*

Введём переменную $M(x,t) = \frac{v(x,t)}{a_0}$. В системе (1.1), (1.2) перейдём к новым функциям $M(x,t)$, $\alpha(x,t)$ и будем строить решение этой системы виде асимптотических разложений (1.10) для $\alpha(x,t)$ и в виде следующего асимптотического разложения для $M(x,t)$:

$$M(x,t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot M_1(x,t) + \varepsilon^2 \cdot M_2(x,t) + \ldots \quad (2.1).$$

Здесь $M_1(x,t)$, $M_2(x,t)$ имеют порядок $O(1)$. Первые члены асимптотических разложений (1.10), (2.1) удовлетворяют линейной системе уравнений:

$$\frac{\partial(M_1 - \mu \cdot t)}{\partial t} + a_0 \cdot \frac{\partial\left(\frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1}\right)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1}\right)}{\partial t} + a_0 \cdot \frac{\partial(M_1 - \mu \cdot t)}{\partial x} = 0 \quad (2.3).$$

Получим далее соотношение, которое выполняется всюду в области применимости линейного решения. Для этого почленно вычтем из соотношения (2.2) соотношение (2.3). В результате получаем:

$$\frac{\partial\left(M_1 - \mu \cdot t - \frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1}\right)}{\partial t} - a_0 \cdot \frac{\partial\left(M_1 - \mu \cdot t - \frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1}\right)}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) означает что полная производная:

$$\frac{d\left(M_1 - \mu \cdot t - \frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1}\right)}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

вдоль характеристик системы (2.2), (2.3) удовлетворяющих дифференциальному уравнению $\frac{dx}{dt} = -a_0$. Как следует из вышесказанного, получаем:

$$M_1 - \mu \cdot t - \frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1} = C_1 \quad (2.6).$$

Произвольная постоянная C_1 находится из условий на слабом разрыве $x = a_0 \cdot t$, который распространяется по покоящейся жидкости:

$$M_1 = \alpha_1 = \mu = 0 \quad (2.7).$$

В итоге получаем соотношение, которое выполняется всюду в области применимости линейного решения:

$$M_1 - \mu \cdot t = \frac{2 \cdot \alpha_1}{\kappa - 1} \quad (2.8).$$

Если в (2.8) в области течения положить $\mu = 0$, то получим известное соотношение теории коротких волн [1]. Для построения линейного решения исключим из системы (2.2), (2.3) функцию $\alpha_1(x,t)$ что приводит к волновому уравнению для $M_1(x,t)$:

$$\frac{\partial^2\left(M_1-\mu\cdot t\right)}{\partial t^2}=a_0^2\cdot\frac{\partial^2\left(M_1-\mu\cdot t\right)}{\partial x^2} \quad (2.9).$$

Так как мы ищем решение виде волны одного направления, то решение (2.9) имеет вид:

$$M_1-\mu\cdot t=F\left(t-\frac{x}{a_0}\right) \quad (2.10).$$

Произвольная функция F в (2.10) находится из граничного условия, которое получается из (1.7) путём разложения (1.7) по малому параметру ε и имеет вид:

$$M_1(0,t)=\begin{cases}\frac{t}{t_0}; & 0\le t\le t_0\\ 1; & t_0\le t\le k\cdot t_0\\ \frac{(k+1)\cdot t_0-t}{t_0}; & k\cdot t_0\le t\le (k+1)\cdot t_0\end{cases} \quad (2.11).$$

Вычисления дают значение произвольной функции F:

$$F(\tau)=\begin{cases}\left(\frac{1}{t_0}-\mu\right)\cdot\tau; & 0\le t\le t_0\\ 1-\mu\cdot\tau; & t_0\le t\le k\cdot t_0\\ k+1-\left(\frac{1}{t_0}+\mu\right)\cdot\tau; & k\cdot t_0\le t\le (k+1)\cdot t_0\end{cases} \quad (2.12).$$

Из соотношений(2.10) и (2.12) получаем окончательно выражение для линейного решения:

$$M_1=\begin{cases}\left(\frac{1}{t_0}-\mu\right)\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right)+\mu\cdot t=\frac{1}{t_0}\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right)+\mu\cdot\frac{x}{a_0}; & 0\le t\le t_0\\ 1-\mu\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right)+\mu\cdot t=1+\mu\cdot\frac{x}{a_0}; & t_0\le t\le k\cdot t_0\\ k+1-\left(\frac{1}{t_0}+\mu\right)\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right)+\mu\cdot t=k+1-\frac{1}{t_0}\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right)+\mu\cdot\frac{x}{a_0}; & k\cdot t_0\le t\le (k+1)\cdot t_0\end{cases} \quad (2.13).$$

Для нахождения высоты волны, $h(x,t)-h_0$

Над невозмущённой поверхностью $z=h_0$ будем использовать соотношение:

$$h-h_0=\varepsilon\cdot h_0\cdot\eta_1(x,t) \quad (2.14).$$

Отметим что выражение $\eta_1(x,t)$ в функции от $M_1(x,t)$ получается из (2.8) и (1.12) и имеет вид:

$$\eta_1=M_1-\mu\cdot t \quad (2.15).$$

Таким образом для высоты волны $h-h_0$ получаем окончательно:

$$h-h_0=\varepsilon\cdot h_0\cdot\left(M_1-\mu\cdot t\right) \quad (2.16)$$

Где M_1 дается выражением (2.13).

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Линейные решения, полученные в предыдущем параграфе, в котором все возмущения распространяются с одной и той же скоростью a_0, не может давать реальной картины течения, в некоторой окрестности фронта волны порядка $O(\varepsilon)$. В этой окрестности введём новую переменную δ, $\delta=O(1)$ по формуле:

$$\varepsilon\cdot\delta=a_0\cdot t-x \quad (3.1)$$

В системе (1.1), (1.2) как и при построении линейного решения прейдём к функциям M,α и будем строить решение этой системы виде асимптотических разложений (1.10), (2.1), причём коэффициенты этих разложений M_i,α_i зависят теперь от переменных δ,t первые члены этих разложений $M_1(\delta,t)$, $\alpha_1(\delta,t)$ удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial\left(M_1-\mu\cdot t\right)}{\partial\delta}-\frac{\partial\left(\frac{2\cdot\alpha_1}{\kappa-1}\right)}{\partial\delta}=0 \quad (3.2).$$

Интегрирование этого уравнения даёт:

$$M_1-\mu\cdot t-\frac{2\cdot\alpha_1}{\kappa-1}=\xi(t) \quad (3.3)$$

где $\xi(t)$ произвольная функция. Выберем $\xi(t)=0$ что бы обеспечит сращивание нелинейного решения с линейным. Этот выбор даёт соотношение:

$$M_1-\mu\cdot t=\frac{2\cdot\alpha_1}{\kappa-1} \quad (3.4),$$

которое совпадает с полученным выше соотношением (2.8) для линейного решения. Коэффициенты при ε, того же самого упомянутого выше асимптотического разложения, удовлетворяют уравнению, которое с учётом (3.4) имеет вид:

$$\frac{\partial\left(M_1-\mu\cdot t\right)}{\partial t}-a_0\cdot\left(\frac{\kappa+1}{2}\cdot M_1-\frac{\kappa-1}{2}\cdot\mu\cdot t\right)\cdot\frac{\partial\left(M_1-\mu\cdot t\right)}{\partial\delta}=0 \quad (3.5).$$

Соотношение (3.5) означает, что полная производная:

$$\frac{d\left(M_1-\mu\cdot t\right)}{dt}=0 \qquad (3.6)$$

вдоль характеристик уравнения (3.5) удовлетворяющих дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\delta}{dt}=-a_0\cdot\left(\frac{\kappa+1}{2}\cdot M_1-\frac{\kappa-1}{2}\cdot\mu\cdot t\right) \qquad (3.7).$$

Из соотношения (3.6) следует что:

$$M_1-\mu\cdot t=C_2 \qquad (3.8).$$

вдоль характеристик дифференциального уравнения (3.7). При интегрировании (3.7) заменим в этом уравнении M_1 в соответствии с соотношением (3.8). Выполняя интегрирование(3.7) получим:

$$\frac{\delta}{a_0}+\frac{\kappa+1}{2}\cdot C_2\cdot t+\frac{\mu\cdot t^2}{2}=C_3 \qquad (3.9).$$

Знание двух интегралов (3.8), (3.9) уравнения (3.5) даёт общее решение этого уравнения:

$$M_1-\mu\cdot t=\Phi\left(\frac{\delta}{a_0}+\frac{\kappa+1}{2}\cdot\left(M_1-\mu\cdot t\right)\cdot t+\frac{\mu\cdot t^2}{2}\right) \qquad (3.10)$$

где Φ произвольная функция своего аргумента. Выберем произвольную функцию Φ из условия сращивания нелинейного решения (3.10) с линейным решением (2.13) на промежутке $0\le t\le t_0$:

$$M_1-\mu\cdot t=\frac{1}{t_1}\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right) \qquad (3.11),$$

где $\frac{1}{t_1}=\frac{1}{t_0}-\mu$. В соответствии с принципом сращивания асимптотических разложений Ван Дайка [2], перейдём в нелинейном решении к переменным $x,\ t$, и приравняем главные части линейного и нелинейного решений, полученные при фиксированных значениях x,t этих решений при $\varepsilon\to 0$. Главная част линейного решения (3.11) совпадает с правой частью (3.11) Главная часть нелинейного решения (3.10) при $\varepsilon\to 0$ и фиксированных x,t имеет вид $\Phi\left(\frac{\frac{t-x}{a_0}}{\varepsilon}\right)$. Приравнивая главные части линейного и нелинейного решений. Получим:

$$\Phi\left(\frac{\frac{t-x}{a_0}}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{t_1}\cdot\left(t-\frac{x}{a_0}\right) \qquad (3.12).$$

Из (3.12) получаем значение произвольной функции $\Phi\left(\tau\right)$:

$$\Phi\left(\tau\right)=\frac{\varepsilon\cdot\tau}{t_1} \qquad (3.13).$$

Из соотношений (3.10), (3.13) получаем окончательно выражение для нелинейного решения:

$$M_1-\mu\cdot t=\frac{1}{t_1}\cdot\left\{\left[1+\frac{\kappa+1}{2}\left(M_1-\mu\cdot t\right)\cdot\varepsilon+\frac{\varepsilon\cdot\mu}{2}\right]\cdot t-\frac{x}{a_0}\right\} \qquad (3.14).$$

Уравнение характеристик (3.9) можно записать в следующем виде:

$$\left(1+\frac{\kappa+1}{2}\cdot C_2\cdot\varepsilon+\frac{\mu\cdot t\cdot\varepsilon}{2}\right)\cdot t-\frac{x}{a_0}=C_3 \qquad (3.15).$$

В полученном соотношении (3.15) выразим постоянные C_2 и C_3 в функции от параметра $\tau,\quad \tau\ge 0$ где τ момент времени зарождения характеристики на оси $x=0$. Из соотношения (3.8) и граничное условие (2.11) находим:

$$C_2=\frac{\tau}{t_1} \qquad (3.16),$$

где параметр τ сохраняется вдоль каждой характеристики, но меняется от одной характеристики к другой. Найдём постоянную C_3 в формуле (3.15) в функции от параметра τ, используя условие что при $x=0\ \ t=\tau$. Используя это условие в формуле (3.15) получаем:

$$C_3=\tau+\frac{\kappa+1}{2\cdot t_1}\cdot\tau^2\cdot\varepsilon+\frac{\mu\cdot\tau^2\cdot\varepsilon}{2} \qquad (3.17).$$

Используя полученные значения C_2 и C_3 в (3.15) приходим к уравнению однопараметрического семейства характеристик параметра τ:

$$t+\frac{\kappa+1}{2\cdot t_1}\cdot\tau\cdot t\cdot\varepsilon+\frac{\mu\cdot t^2\cdot\varepsilon}{2}-\frac{x}{a_0}=\tau+\frac{\kappa+1}{2\cdot t_1}\cdot\tau^2\cdot\varepsilon+\frac{\mu\cdot\tau^2\cdot\varepsilon}{2} \qquad (3.18).$$

Дифференцируя по параметру τ (3.18) находим выражение для времени t в функции от параметра τ, которое является одним из параметрических уравнений огибающей семейства характеристик (3.18):

$$\frac{\left(\kappa+1\right)\cdot\varepsilon\cdot t}{2\cdot t_1}=1+2\cdot\left(1+\frac{\mu\cdot t_1}{\kappa+1}\right)\cdot\tau \qquad (3.19).$$

Для получения второго параметрического уравнения огибающей системы характеристик (3.18) следует заменить в этом уравнении t в соответствии с соотношением (3.19). Мы ограничимся только одним параметрическим уравнением (3.19) для t, так как в дальнейшем изложении огибающая не будет использована. Полагая в (3.19) $\tau=0$ для

координаты t^* угловой точки огибающей, находим:

$$t^* = \frac{2 \cdot t_1}{(\kappa+1) \cdot \varepsilon} \quad (3.20).$$

Для получения другой координаты x^* положим в (3.18) $\tau = 0$ и заменим t на t^* в (3.18). Вычисления дают:

$$x^* = a_0 \cdot t^* \cdot \left(1 + \frac{\mu \cdot t_1}{\kappa+1}\right) \quad (3.21).$$

Из соотношения (3.14) находим явное выражение для $M_1 - \mu \cdot t$:

$$M_1 - \mu \cdot t = \frac{\frac{2}{(\kappa+1)\cdot\varepsilon} \cdot (x - a_0 \cdot t)}{a_0 (t - t^*)} - \frac{\mu \cdot t^2}{(\kappa+1)\cdot(t - t^*)} \quad (3.22).$$

Обсудим поведение построенного решения для моментов времени $\mu \cdot t = O(1)$ области применимости метода малого параметра. В этой области нелинейное решение даётся формулой (3.22) и его невозможно продолжить вплоть до огибающей, где $t = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. В рассматриваемой области, константа C_2 имеет вид:

$$C_2 = \frac{\tau}{t_1},\ 0 \le \tau \le t_0 \quad (3.23).$$

Запишем уравнение характеристик (3.18) в более удобном виде:

$$\frac{x}{a_0} = \left(1 + \frac{\kappa+1}{2} \cdot C_2 \cdot \varepsilon + \frac{\mu(t+\tau)\cdot\varepsilon}{2}\right) \cdot (t - \tau) \quad (3.24).$$

Отметим что соотношение (3.24) имеет место для всех трёх интервалов движения. Как следует из (3.24) при $\tau = 0$ головной фронт гидравлической волны перемещается по траектории:

$$x = a_0 \cdot t \cdot \left(1 + \frac{\mu \cdot t \cdot \varepsilon}{2}\right) \quad (3.25).$$

Заметим что высота волны $h - h_0$ (смотри формулу(2.14)) определяется функцией $\eta_1(x,t)$ по формуле (2.15) поэтому имеет место следующее соотношение:

$$\eta_1 = M_1 - \mu \cdot t = C_2 \quad (3.26).$$

Как следует из (3.26) на фронте волны (3.25) высота волны $h - h_0 = 0$. По мере роста параметра τ константа C_2 монотонно возрастает и достигает максимума при $\tau = t_0$, что соответствует максимуму высоты волны $h - h_0$:

$$h - h_0 = \varepsilon \cdot h_0 \cdot (1 - \mu \cdot t_0) \quad (3.27).$$

Заметим, что высота волны сохраняется вдоль каждой характеристики, но меняется от одной характеристики к другой. В частности, полученный максимум высоты гидравлической волны перемещается вдоль характеристики (3.24), где $\tau = t_0$. Очевидно, что величина скорости частиц вдоль характеристик определяется по формуле:

$$M_1 = C_2 + \mu \cdot t \quad (3.28).$$

В частности, на характеристике, возникающей в момент $\tau = t_0$, величина скорости даётся соотношением:

$$M_1 = 1 + \mu \cdot (t - t_0) \quad (3.29).$$

Перейдём далее к исследованию течения на интервале времени $[t_0, k \cdot t_0]$. Отметим, что все основные формулы, в частности, для характеристик C_2 остаются теми же самыми на исследуемом интервале (а также и на интервале $[k \cdot t_0, (k+1) \cdot t_0]$). Для определения траектории характеристик мы по прежнему используем (3.24) в которой C_2 в соответствии с граничным условием (2.11) имеют вид $C_2 = 1 - \mu \cdot \tau$. Очевидно что в соответствии с этим выражением для C_2 значение $h - h_0$ уменьшается от своего максимума в точке t_0 до некоторого значения в точке $k \cdot t_0$, которое отвечает значению $C_2 = 1 - \mu \cdot k \cdot t_0$. Отметим что мы считаем $0 < \mu < \frac{1}{k \cdot t_0}$. Для значения скорости частиц на рассматриваемом интервале вычисления дают $M_1 = 1 + \mu \cdot (t - \tau)$. Также как это было сделано выше на интервале $[0, t_0]$ линейное решение сращивается по методу Ван-Дайка с нелинейным, и в конечном итоге, нелинейное решение на сегменте $[t_0, k \cdot t_0]$ имеет вид:

$$M_1 - \mu \cdot t = \frac{2 \cdot \left(x - a_0 \cdot t - \frac{a_0 \cdot \mu \cdot t^2 \cdot \varepsilon}{2} + \frac{a_0}{\mu}\right)}{a_0 \cdot (\kappa+1) \cdot \varepsilon \cdot \left(t + \frac{2}{(\kappa+1)\cdot\mu\cdot\varepsilon}\right)} \quad (3.30).$$

Перейдём к исследованию течения на сегменте $[k \cdot t_0, (k+1) \cdot t_0]$. На этом интервале C_2 даётся соотношением $C_2 = (k+1) - \frac{\tau}{t_2}$,где $\frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_1 + \mu}$. В соответствии с этим значением C_2 высота волны $h - h_0$ падает от некоторого значения соответствующего $C_2 = 1 - k \cdot \mu \cdot t_0$ до минимального значения , отвечающего значению

$C_2 = -(k+1)\cdot\mu\cdot t_0$. Также как и это было сделано выше, нелинейное решение сращивается с линейным и имеет окончательный вид:

$$M_1 - \mu\cdot t = \frac{2\cdot\left(x - a_0\cdot t - \frac{a_0\cdot\mu\cdot t^2\cdot\varepsilon}{2} + a_0\cdot(k+1)\cdot t_2\right)}{a_0\cdot(\kappa+1)\cdot\varepsilon\cdot\left(t + \frac{2\cdot t_2}{(\kappa+1)\cdot\varepsilon}\right)} \quad (3.31).$$

Для того случая когда $\mu < 0$ все предыдущие вычисления формально имеют тот же вид. В этом сценарии силы сопротивления превосходят силу ветра и анализ предыдущих соотношений позволяет сделать вывод что высота волны $h - h_0$ увеличивается с ростом времени, а скорости частиц M_1 уменьшаются.

Список литературы:

1. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христянович С.А. «Теория коротких волн» Прикладная математика и механика; 1960 №1 163-174.
2. Ван Дайк М. «Методы возмущений в механике жидкости» пер. с англ. В. А. Смирнова; под ред. А.А.Никольского М.: Мир. 1967. 310 с.

MODELING SPREAD OF LIGHT IN LAYERED-HETEROGENEOUS MEDIUM

Kozhabayev Rakhimzhan
PhD (Candidate of Pedagogical Sciences)
KSU n. a. Sh. Ualikhanov
Shuyushbayeva Nurgul
PhD
KSU n. a. Sh. Ualikhanov
Tanasheva Nazgul
PhD
KarSU n. a. Y.A. Buketov
Zhumazhanov Yelnur
Master of 2-course of the faculty of natural sciences
KSU n. a. Sh. Ualikhanov

ABSTRACT

The article considers the possibility of modeling the propagation of light in a layered inhomogeneous medium. The knowledge of students in the field of mathematics and informatics makes it possible to organize a new kind of educational activity, like mathematical and computer modeling, while studying the phenomenon of light propagation in a layered heterogeneous medium.

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается возможность моделирования распространения света в слоисто-неоднородной среде. Знание студентов в области математики и информатики позволяет при изучении явления распространения света в слоисто-неоднородной среде организовать новый вид учебной деятельности, как математическое и компьютерное моделирование.

Keywords: optics, layered-heterogeneous medium, Snell's law, mathematical and computer modeling.

Ключевые слова: оптика, слоисто-неоднородная среда, закон Снеллиуса, математическое и компьютерное моделирование.

Optics of heterogeneous medium is quite extensive and completely not simple area of physics, which has a great scientific-practical importance. For electromagnetic waves of a certain frequency, the earth's atmosphere introduces layered-heterogeneous medium, the refractive index of which continuously decreases with altitude. In such environment the electromagnetic wave spreads curvilinearly, which cannot be demonstrated in laboratory conditions. Thus, familiarizing students with the physical ideas of optics of heterogeneous medium, with which they do not meet in the main course, represents big cognitive interest.

In heterogeneous medium, the idea of the propagation of light along the rays is preserved, and the geometric shape of the ray can be uniquely determined from Snell's law with limit transition way [5, c. 31].

As an example, consider the simplest case, when the refractive index of medium changes in only one direction and depends on one coordinate. Such propagation of light is called layered-heterogeneous medium [3, c. 84].

Imagine an optically heterogeneous medium, the refractive index *n* of which is a function of only one coordinate *y*:

$$n = n(y). \quad (1)$$