17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.- М.: Наука,1979.- 429 с.

18. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функцио- нальными уравнениями. -М. : Наука, 1977.-623 с.

19. Садыгов М.А.Необходимые условия минимума в анормальных задачах с ограничениями. // Eurasian scince journal.- 2019.- 5(62).- С.46-51.

20. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.-443 с.

21. Бурбаки Н. Иитегрирование.- М.:Наука, 1970.-320 с.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА БОЛЬЦА

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет

АННОТАЦИЯ

В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для обобщенной задачи Больца в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Изучаются субдифференциал интегрального и терминального функционала в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала.

ABSTRACT

In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for an extremum for the generalized Boltz problem in the space of Banach-valued absolutely continuous functions. We study the subdifferential of the integral and terminal functional in the space of Banach-valued absolute continuous functions. Note that the minimizing function in the general case is not an internal point of the domain of definition of a functional.

Ключевые слова: необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал.

Key words: necessary condition, Lipschitz function, subdifferential.

1. Введение

В работе исследуется выпуклая вариационная задача, заданная в пространстве абсолютно непрерывных функций. Изучаются субдифференциал интегрального и терминального функционала в пространстве абсолютно непрерывных функций. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами, но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала.

Работа является обобщением некоторых результатов работ автора в ([1], [2, с.82-106], [3, с.263-344]), где получены необходимые и достаточные условия минимума для обобщенной задачи Больца в пространстве $n-$мерных абсолютно непрерывных функций. В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для обобщенной задачи Больца в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций.

2. О непрерывности интегрального функционала

Пусть X сеперабельное банахово пространство, $1 \le p < \infty$. Через $C([t_0,t_1],X)$, как обычно, будем обозначать пространство непрерывных функций $x:[t_0,t_1] \to X$ с нормой $\|x(\cdot)\|_C = \max\{\|x(t)\| : t \in [t_0,t_1]\}$. Обозначим через $L_p([t_0,t_1],X)$ множество (эквивалентных классов) таких измеримых функций $x:[t_0,t_1] \to X$, что $\int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^p dt < +\infty$ при $1 \le p < \infty$ и $\operatorname{ess\,sup}\{\|x(t)\| : t \in [t_0,t_1]\} < \infty$ при $p = +\infty$ (см. [4, с. 96]).

Символом $W_p^1[t_0,t_1],X)$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерыв-ных функций из $[t_0,t_1]$ в X первая производная по Фреше, которых принадлежит $L_p([t_0,t_1],X)$, т.е. положим $W_p^1([t_0,t_1],X) = \{x(\cdot) \in C([t_0,t_1],X) : \dot{x}(\cdot) \in L_p([t_0,t_1],X)\}$. Обозначим $X^* = L(X,R)$, где $L(X,R)$ - банахово пространство линейных непрерывных функционалов заданных на X. Отметим, что при каждом $x^* \in X^*$ и из $x(\cdot) \in W_p^1[t_0,t_1],X)$ следует абсолютная непрерывность числовой функции $\langle x^*, x(t) \rangle$ на $[t_0,t_1]$. Норма в $W_p^1([t_0,t_1],X)$ может быть задана разными эквивалентными способами. Например

$$\|x(\cdot)\|_1 = \|x(t_0)\| + \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{x}(t)\|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{или} \quad \|x(\cdot)\|_2 = \max_{t_0 \le t \le t_1} \|x(t)\| + \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{x}(t)\|^p dt\right)^{1/p}.$$

Так как $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} z(s)ds$ при $x(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$, где $x_0 \in X$ и $z(\cdot) \in L_1([t_0,t_1],X)$ интегрируемая по Бохнеру функция, то функцию $x(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$ называют также абсолютно непрерывной. Поэтому пространство $W_1^1([t_0,t_1],X)$ иногда обозначается через $AC([t_0,t_1],X)$.

Символом $W_\infty^1[t_0,t_1],X)$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерыв-ных функций из $[t_0,t_1]$ в X, у который первая производная по Фреше принадлежит $L_\infty([t_0,t_1],X)$, т.е. рассмотрим пространство $W_\infty^1([t_0,t_1],X) = \{x(\cdot) \in C([t_0,t_1],X) : \dot{x}(\cdot) \in L_\infty([t_0,t_1],X)\}$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_1 = \|x(t_0)\| + \operatorname{ess\,sup}\{\|\dot{x}(t)\| : t \in [t_0,t_1]\}.$$

Функция $z : [t_0,t_1] \to X$ называется μ-простой (см.[4, с.90]), если существуют такие $k \in N$, $x_i \in X$ и различные множества A_i, $i = 1,\ldots,k$, что $[t_0,t_1] = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ и $f(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}(t)x_i$ при $t \in [t_0,t_1]$, где $\chi_{A_i}(t)$ - характеристическая функция множества A_i. Множество μ-простых функций из $[t_0,t_1]$ в X обозначим через S. Символом SF обозначим множество абсолютно непрерывных функций из $[t_0,t_1]$ в X у который первая производная по Фреше принадлежит S, т.е. положим $SF = \{x(\cdot) \in C([t_0,t_1],X) : \dot{x}(\cdot) \in S\}$.

Из теоремы 1.4.30[4, с.96] имеем,что множество SF плотно в пространстве $W_p^1([t_0,t_1],X)$ при $1 \le p < \infty$. Так как $SF \subset W_\infty^1[t_0,t_1],X)$, то имеем, что $W_\infty^1[t_0,t_1],X)$ плотно в $W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Обозначим $W_p^1[t_0,t_1] = W_p^1([t_0,t_1],R)$ и $C[t_0,t_1] = C([t_0,t_1],R)$, где $R = (-\infty,+\infty)$. Если $x^* \in X^*$, $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$ и $z(\cdot) \in C([t_0,t_1],X)$, то $\langle x^*, x(\cdot)\rangle \in W_p^1[t_0,t_1]$ и $\langle x^*, z(\cdot)\rangle \in C[t_0,t_1]$. Обратно, если $x \in X$, $\varphi(\cdot) \in W_p^1[t_0,t_1]$ и $\psi(\cdot) \in C[t_0,t_1]$, то $\varphi(\cdot)x \in W_p^1([t_0,t_1],X)$ и $\psi(\cdot)x \in C([t_0,t_1],X)$. Тогда если $x^* \in X^*, x^* \ne 0$, то легко проверяется, что

$$\{\langle x^*, x(\cdot)\rangle : x(\cdot) \in C([t_0,t_1],X)\} = C[t_0,t_1], \quad \{\langle x^*, x(\cdot)\rangle : x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)\} = W_p^1[t_0,t_1]$$

при $1 \le p \le \infty$. Поэтому из леммы Мазура [5, с.16] и отсюда следует, что множество $W_p^1([t_0,t_1],X)$ плотно в $C([t_0,t_1],X)$ при $p \ge 1$.

Пусть $g : [t_0,t_1] \times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, т.е. $x \to g(t,x)$ выпуклы и полунепрерывны снизу на X при $t \in [t_0,t_1]$ и многозачное отображение $t \to \operatorname{ep} g_t$ изме-римо (см. [6, с.338], [7, с.67]).

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями понимаются как почти всюду.

Положим $B_\alpha = \{x \in X : \|x\| \le \alpha\}$, где $\alpha > 0$.

Условие r). Если $x_0(\cdot) \in L_\infty([t_0,t_1],X)$, $T \subset [t_0,t_1]$ компактное множество и функция $(t,x) \to g(t,x_0(t)+x)$ непрерывна на множестве $T \times B_\alpha$, то существуют независящее от T числа $L > 0$, δ, где $0 < \delta \le \alpha$, и функция $d(\cdot) \in L_1[t_0,t_1]$ такие, что $g(t,x_0(t)+x) \le d(t) + L\|x\|$ при $x \in B_\delta$, $t \in T$.

Отметим, что если $|g(t,x_0(t)+x) - g(t,x_0(t))| \le L\|x\|$ при $x \in B_\delta$, $t \in T$, где $L > 0$, $0 < \delta \le 1$, то $|g(t,x_0(t)+x) - g(t,x_0(t))| \le 1$ при $x \in B_{\delta/L}$, $t \in T$.

Лемма 2.1. Пусть g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X,$ выпуклый функционал $J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$ и выполняется условие $r)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

a) функционал $J(x(\cdot))$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty([t_0,t_1],X)$;

b) существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x)$ суммируема при $x\in X$, $\|x\|\le\varepsilon$;

d) существуют число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$ такие, что $\sup\{g(t,x_0(t)+x): x\in X,\ \|x\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Доказательство. Очевидно, что из a) следует b).

Пусть выполнено b), т.е. $g:[t_0,t_1]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный выпуклый интегрант и существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $t\to g(t,x_0(t)+x)$ суммируема при $x\in X$, $\|x\|\le\varepsilon$ где $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$. Так как $g_t: X\to R_{+\infty}$ полунепрерывная снизу функция, то из следствия 1.2.5[5] следует, что $x\to g(t,x_0(t)+x)$ непрерывная функция в $B_{\bar\varepsilon}=\{z\in X:\|z\|\le\bar\varepsilon\}$, где $0<\bar\varepsilon<\varepsilon.$ По теореме Скорца-Драгони[8, с.14] для любого $\nu>0$ существует компактное множество $T_\nu\subset[t_0,t_1]$ такое, что $\mu([t_0,t_1]\setminus T_\nu)<\nu$ и функция $(t,x)\to g(t,x_0(t)+x)$ непрерывна на множестве $T_\nu\times B_{\bar\varepsilon}$. Тогда по условию $r)$ существуют число δ которое не зависит от ν, где $0<\delta\le\bar\varepsilon,$ $L>0$ и функция $d(\cdot)\in L_1[t_0,t_1]$ такие, что $g(t,x_0(t)+x)\le d(t)+L\|x\|$ при $x\in B_\delta$, $t\in T_\nu$. Отсюда следует, что $g(t,x_0(t)+x)\le d(t)+L\delta$ при $x\in B_\delta$, $t\in T_\nu$. Тогда $\sup\{g(t,x_0(t)+x): x\in X,\ \|x\|\le\delta\}\le d(t)+L\delta$ при $t\in T_\nu$. Отсюда при $\nu\to 0$ имеем, что $\sup\{g(t,x_0(t)+x): x\in X,\ \|x\|\le\delta\}\le d(t)+L\delta$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Если выполняется d), т.е. $g(t,x_0(t)+x(t))\le r(t)$ при $x(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$, $\|x(t)\|_{L_\infty}\le\varepsilon$, то $\int_{t_0}^{t_1} g(t,z(t))dt\le\int_{t_0}^{t_1} r(t)dt$ при $z(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$, $\|z(t)-x_0(t)\|_{L_\infty}\le\varepsilon$. Тогда по теореме 3.2.1[6, с.181] функционал $J(x(\cdot))$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty([t_0,t_1],X)$. Лемма доказана.

Отметим, что если функционал $J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$, выполняется d), $g(t,x)$ $L\times B$-измеримая функция и $x\to g(t,x)$ выпуклая функция, то функционал J непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty([t_0,t_1],X)$, где $L\times B$ $\sigma-$алгебра, состоящая из подмножеств $[t_0,t_1]\times X$, порождается множествами вида $A\times D$, где A -измеримое по Лебегу подмножество $[t_0,t_1]$, $D-$борелевское множество в X.

Из леммы 2.1 следует следующее следствие.

Следствие 2.1. Пусть g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X,$ выпуклый функционал $J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$ и выполняется условие $r)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

функционал $J(x(\cdot))$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $C([t_0,t_1],X)$;

b) существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x)$ суммируема при $x\in X$, $\|x\|\le\varepsilon$;

d) существуют число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$ такие, что $\sup\{g(t,\ x_0(t)+x): x\in X,\ \|x\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Если $x_0(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$ и $(t,x)\to g(t,x_0(t)+x)$ равномерно непрерывная функция на множестве $[t_0,t_1]\times B_\alpha$, то выполняется условие $r)$.

Лемма 2.2. Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X,$ выпуклый функционал $J(x(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ и выполняется условие $r)$, то следующие условия эквивалентны:

a) функционал J непрерывен в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$;

b) существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $g(t,x_0(t)+x)$ суммируема при $x\in X$, $\|x\|\le\varepsilon$;

d) существуют число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$ такие, что $\sup\{g(t,x_0(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Доказательство. Очевидно, что из a) следует b).

Пусть выполнено b), т.е. $g:[t_0,t_1]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный выпуклый интегрант и существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $t\to g(t,x_0(t)+x)$ суммируема при $x\in X$, $\|x\|\le\varepsilon$, где $x_0(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Так как $g_t:X\to R_{+\infty}$ полунепрерывная снизу функция, то из следствия 1.2.5[5,с.23] следует, что $x\to g(t,x_0(t)+x)$ непрерывная функция в $B_{\bar\varepsilon}=\{z\in X:\|z\|\le\bar\varepsilon\}$, где $0<\bar\varepsilon<\varepsilon.$ По теореме Скорца-Драгони [8, с.14] для любого $\nu>0$ существует компактное множество $T_\nu\subset[t_0,t_1]$ такое, что $\mu([t_0,t_1]\setminus T_\nu)<\nu$ и функция $(t,x)\to g(t,x_0(t)+x)$ непрерывна на множестве $T_\nu\times B_{\bar\varepsilon}$. Тогда по условию $r)$ существуют число δ которое не зависит от ν, где $0<\delta\le\bar\varepsilon,$ $L>0$ и функция $d(\cdot)\in L_1[t_0,t_1]$ такие, что $g(t,x_0(t)+x)\le d(t)+L\|x\|$ при $x\in B_\delta$, $t\in T_\nu$. Отсюда следует, что $g(t,x_0(t)+x)\le d(t)+L\delta$ при $x\in B_\delta$, $t\in T_\nu$. Тогда $\sup\{g(t,x_0(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\delta\}\le d(t)+L\delta$ при $t\in T_\nu$. Отсюда при $\nu\to 0$ имеем, что $\sup\{g(t,x_0(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\delta\}\le d(t)+L\delta$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Если выполняется d), т.е. $g(t,x_0(t)+x(t))\le r(t)$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $\|x(t)\|_{W_p^1}\le\varepsilon$, то $\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,z(t))dt\le\int\limits_{t_0}^{t_1} r(t)dt$ при $z(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $\|z(t)-x_0(t)\|_{W_p^1}\le\varepsilon$. Тогда по теореме 3.2.1[6, с.181] функционал $J(x(\cdot))$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$. Лемма доказана.

Отметим, что справедливость леммы 2.2 также следует из леммы 2.1.

Замечание 2.1. Если $g(t,x)$ $L\times B$-измерима на $[t_0,t_1]\times X,$ $x\to g(t,x)$ выпуклая функция, $J(x(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ и существуют число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$ такие, что $\sup\{g(t,x_0(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$, то функционал J также непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$. Отметим, что если $X=R^n$ и $g(t,x)$ $L\times B$-измеримая функция на $[t_0,t_1]\times X,$ $x\to g(t,x)$ выпуклая функция, то используя следствие 1.2.3[5, с.22] аналогично получим, что леммы 2.1 и 2.2 также верны.

Лемма 2.3. Пусть g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X,$ выпуклый функционал $J(x(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$ и для некоторого $\alpha>0$ выполняется неравенство $\sup\{g(t,x_0(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\alpha\}<+\infty$ при $t\in[t_0,t_1]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

a) функционал J непрерывен в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty([t_0,t_1],X)$;

b) существуют число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$ такие, что $\sup\{g(t,x_0(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Доказательство. Если выполнено a), то существует $\varepsilon>0$ такое, что $g(t,x_0(t)+x(t))$ интегрируемо при $x(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$, $\|x(\cdot)\|_{L_\infty}\le\varepsilon$. Так как $g:[t_0,t_1]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный выпуклый интегрант, функция

$x \to g(t, x_0(t) + x)$ суммируема при $x \in X$, $\|x\| \le \varepsilon$ и $g_t : X \to R_{+\infty}$ полунепрерывная снизу функция, то из следствия 1.2.5[5,с.23] следует, что $x \to g(t, x_0(t) + x)$ непрерывная функция в $B_{\bar{\varepsilon}} = \{z \in X : \|z\| \le \bar{\varepsilon}\}$, где $0 < \bar{\varepsilon} < \min\{\varepsilon, \alpha\}$. Обозначим $\sup\{g(t, x_0(t) + x) : x \in X, \|x\| \le \bar{\varepsilon}\} = \varphi(t)$. Из теоремы 1.4.21[4,с.89] следует, что $\varphi(t)$ измеримая функция. Если $\nu > 0$, то положим $F_\nu(t) = \{x \in X : g(t, x_0(t) + x) > \varphi(t) - \nu, \|x\| \le \bar{\varepsilon}\}$. Из следствия 2 [7,с.67] следует, что $F_\nu(t)$ измеримое многозначное отображение. Пусть $x_\nu(t) \in F_\nu(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ и $x_\nu(t)$ измеримая функция (см. следствие теоремы 1 [7,с.67]). Так как $\|x_\nu(t)\| \le \varepsilon$, то имеем, что $x_\nu(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], X)$. Поэтому $g(t, x_0(t) + x_\nu(t))$ суммируема и $\sup\{g(t, x_0(t) + x) : x \in X, \|x\| \le \bar{\varepsilon}\} \le g(t, x_0(t) + x_\nu(t)) + \nu$. Если положить $r(t) = g(t, x_0(t) + x_\nu(t)) + \nu$, то из $a)$ следует $b)$.

Если выполняется $b)$, т.е. $g(t, x_0(t) + x(t)) \le r(t)$ при $x(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], X)$, $\|x(t)\|_{L_\infty} \le \varepsilon$, то $\int_{t_0}^{t_1} g(t, z(t))dt \le \int_{t_0}^{t_1} r(t)dt$ при $z(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], X)$, $\|z(t) - x_0(t)\|_{L_\infty} \le \varepsilon$. Тогда по теореме 3.2.1 [6, с.181] функционал $J(x(\cdot))$ непрерывен в точке $x_0(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], X)$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty([t_0, t_1], X)$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. Пусть g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0, t_1] \times X$, существуют число $\varepsilon > 0$ и суммируемая функция $r(t) > 0$ такие, что $\sup\{|g(t, x_0(t) + x)| : x \in X, \|x\| \le \varepsilon\} \le r(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. Отсюда следует, что $-r(t) \le g(t, x_0(t) + x) \le r(t)$ при $x \in X$, $\|x\| \le \varepsilon$. Если $0 < \alpha < \varepsilon$, то из доказательства следствия 1.2.4[5] следует, что

$$|g(t, x_0(t) + x_2) - g(t, x_0(t) + x_1| \le \frac{2\, r(t)}{\varepsilon - \alpha} \|x_2 - x_1\|$$

при $x_1, x_2 \in B_\alpha$ и $t \in [t_0, t_1]$. Обратно, если функционал $J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], X)$ (или $x_0(\cdot) \in W_p^1([t_0, t_1], X)$) и существует функция $\lambda(\cdot) \in L_1[t_0, t_1]$ такая, что $|g(t, x_0(t) + x) - g(t, x_0(t))| \le \lambda(t)\|x\|$ при $x \in X$, $\|x\| \le \varepsilon$, то $|g(t, x_0(t) + x)| \le |g(t, x_0(t))| + \lambda(t)\varepsilon$ при $x \in X$, $\|x\| \le \varepsilon$. Поэтому

$$\sup\{g(t, x_0(t) + x) : x \in X, \|x\| \le \varepsilon\} \le \sup\{|g(t, x_0(t) + x)| : x \in X, \|x\| \le \varepsilon\} \le |g(t, x_0(t))| + \lambda(t)\varepsilon$$

при $t \in [t_0, t_1]$.

Отметим, что используя следствие 1.2.3[5, с.22] аналогично лемме 2.3 проверяются, что если $X = R^n$, $g(t, x)$ $L \times B$-измеримая функция на $[t_0, t_1] \times X$ и $x \to g(t, x)$ выпуклая функция, то лемма 2.3 также верна.

Легко проверяется, что если $J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, \bar{x}(t))dt$ конечен в точке $\bar{x}(\cdot) \in W_p^1([t_0, t_1], X)$ и существует функция $\lambda(\cdot) \in L_1[t_0, t_1]$ такая, что $|g(t, x_2) - g(t, x_1| \le \lambda(t)\|x_2 - x_1\|$ при $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} g_t$, то функционал $J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t))dt$ непрерывен в $\operatorname{int} \operatorname{dom}_{W_p^1} J$ относительно нормированной топологии пространства $C([t_0, t_1], X)$ ($W_p^1([t_0, t_1], X)$), где $\operatorname{dom}_{W_p^1} J = \{x(\cdot) \in W_p^1([t_0, t_1], X) : J(x) < +\infty\}$.

Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0, t_1] \times X$, функционал $J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t))dt$ непрерывен в точке $x_0(\cdot) \in W_p^1([t_0, t_1], X)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0, t_1], X)$, то из доказательства леммы 2.3 следует, что $x \to g(t, x_0(t) + x)$ непрерывная функция в

$B_{\bar{\varepsilon}} = \{z \in X : \|z\| \le \bar{\varepsilon}\}$, где $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$. Пусть существуют функции $\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot) \in L_1[t_0, t_1]$ такие, что $\lambda_1(t) \le g(t, x_0(t) + x) \le \lambda_2(t)$ при $x \in B_{\bar{\varepsilon}}$.

Если $0 < \alpha < \bar{\varepsilon}$, то из доказательства следствия 1.2.4[5, с.22] следует, что

$$\left|g(t, x_0(t) + x_2) - g(t, x_0(t) + x_1\right| \le \frac{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}{\bar{\varepsilon} - \alpha} \|x_2 - x_1\|$$

при $x_1, x_2 \in B_\alpha$ и $t \in [t_0, t_1]$.

Из доказательства предложения 8.3.4[6, с.360] следует, что верна следующая лемма.

Лемма 2.4. Если $g(t,x)$ $L \times B$-измеримая функция на $[t_0, t_1] \times R^n$ и $x \to g(t,x)$ выпуклая функция, выпклый функционал J конечен в точке $x_0(\cdot) \in W_p^1([t_0, t_1], R^n)$, то функционал J непрерывен в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0, t_1], R^n)$ в том и только в том случае, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x)$ суммируема при $x \in R^n$, $\|x\| \le \varepsilon$.

Лемма 2.4 доказана в [1], когда $g(t, x)$ нормальный выпуклый интегрант на $[t_0, t_1] \times R^n$.

Пусть $h : X \to R$. Положим $h'(\bar{x}; z) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \dfrac{h(\bar{x} + \lambda z) - h(\bar{x})}{\lambda}$ при $z \in X$ (см. [5, с.33]).

Лемма 2.5. Если g нормальный интегрант на $[t_0, t_1] \times X$, существуют $a(\cdot) \in L_1[t_0, t_1]$ и число c, что $a(t) + c\|z\|^p \le g(t, z)$, то функционал $J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t, x(t))dt$ полунепрерывен снизу (пн. сн.) на $L_p([t_0, t_1], X)$ ($C([t_0, t_1], X)$, $W_p^1([t_0, t_1], X)$), где $1 \le p < +\infty$.

Если $x \to g(t,x)$ выпуклая функция и существуют $a_1(\cdot) \in L_1([t_0, t_1], X)$ и число $c_1 > 0$, что $|g(t, z)| \le a_1(t) + c_1\|z\|^p$, то $g'(t, \bar{x}(t); x)$ также нормальный выпуклый интегрант на $[t_0, t_1] \times X$ и $J'(\bar{x}(\cdot); x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g'(t, \bar{x}(t); x(t))dt$, где $\bar{x}(\cdot), x(\cdot) \in L_p([t_0, t_1], X)$, $1 \le p < +\infty$.

Доказательство. Пусть $x_n(\cdot) \in L_p([t_0, t_1], X)$ и последовательность $(x_n(\cdot))_{n \in N}$ сходится к $\bar{x}(\cdot)$ в $L_p([t_0, t_1], X)$. Тогда из теоремы 1.4.18 и 1.4.31[4, с.85, с.98] следует, что существует такая последовательность $\{x_m(\cdot)\} \subset \{x_n(\cdot)\}$ и $(x_m(\cdot))_{m \in N}$ почти всюду сходится к $\bar{x}(\cdot)$. Положив $f(t,z) = g(t,z) - a(t) - c\|z\|^p$ из леммы Фату [9, с.97] получим, что $\int\limits_{t_0}^{t_1} \varliminf\limits_{m \to \infty} f(t, x_m(t))dt \le \varliminf\limits_{m \to \infty} \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_m(t))dt$. По условию $x \to f(t,x)$ пн. сн. функция. Поэтому $\varliminf\limits_{m \to \infty} f(t, x_m(t)) \ge f(t, \bar{x}(t))$. Тогда получим, что $J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt$ пн. сн. функционал из $L_p([t_0, t_1], X)$ в $R_{+\infty}$. Так как

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t, \bar{x}(t))dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)dt + c\int\limits_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^p dt,$$

а функционал $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)dt + c\int\limits_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^p dt$ непрерывен на $L_p([t_0, t_1], X)$, то имеем, что $J(x)$ пн.сн. на $L_p([t_0, t_1], X)$. Следовательно, функционал $J(x)$ пн. сн. также в $C([t_0, t_1], X)$ и $W_p^1([t_0, t_1], X)$.

Если выполняется условие второй части леммы 2.5, то из предложения 4.1.3[6, с.205] имеем

$$g'(t, \bar{x}(t); z) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda z) - g(t, \bar{x}(t))}{\lambda}.$$

В частности, положив $\lambda = \frac{1}{n}$ по теореме $5.4.4'$ [10, с.329], отсюда получим, что функция $t \to g'(t,\bar{x}(t);z)$ измерима. Тогда из предложения 4.1.4[6, с.206] следует, что функция $(t,z) \to g'(t,\bar{x}(t);z)$ удовлетворяет условию Каратеодори. Поэтому функция $g'(t,\bar{x}(t);z)$ также является нормальным выпуклым интегрантом. Так как (см. [11, с.63])

$$g(t,\bar{x}(t)) - g(t,\bar{x}(t) - x(t)) \le \frac{g(t,\bar{x}(t) + \lambda x(t)) - g(t,\bar{x}(t))}{\lambda} \le g(t,\bar{x}(t) + x(t)) - g(t,\bar{x}(t))$$

при $0 < \lambda < 1.$ Так как $(a+b)^n \le 2^n(a^n + b^n)$ при $a \ge 0$ и $b \ge 0$, то имеем

$$g(t,\bar{x}(t) + x(t)) - g(t,\bar{x}(t)) \le a(t) + c\left|\bar{x}(t) + x(t)\right|^p - g(t,\bar{x}(t)) \le a(t) + c2^p(\left|\bar{x}(t)\right|^p + \left|x(t)\right|^p) - g(t,\bar{x}(t)),$$

$$g(t,\bar{x}(t)) - g(t,\bar{x}(t) - x(t)) \ge -a(t) - c\left|\bar{x}(t) - x(t)\right|^p + g(t,\bar{x}(t)) \ge -a(t) - c2^p(\left|\bar{x}(t)\right|^p - \left|x(t)\right|^p) + g(t,\bar{x}(t))$$

при $x \in L_p([t_0,t_1],X).$ Поэтому применяя теорему 5.5.6 [10, с.346] Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем $J'(\bar{x};x) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \frac{J(\bar{x} + \lambda x) - J(\bar{x})}{\lambda} = \int\limits_{t_0}^{t_1} g'(t,\bar{x}(t);x(t))dt$ при $x \in L_p([t_0,t_1],X)$. Лемма доказана.

Отметим, что аналог леммы 2.5 верна также и при $p = \infty$. Если g нормальный интегрант, существуют $a(.),\ \beta(\cdot) \in L_1[t_0,t_1]$ такие, что $a(t) + \beta(t)\|z\| \le g(t,z)$ при $t \in [t_0,t_1]$, $z \in X$, то аналогично лемме 2.5 имеем $J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ полунепрерывен снизу в $L_\infty([t_0,t_1],X)$ ($C([t_0,t_1],X)$ и $W_p^1([t_0,t_1],X)$). Кроме того, если $g:[t_0,t_1] \times X \to R$ каратеодориевская функция и существуют $\bar{a}(\cdot),\ \bar{\beta}(\cdot) \in L_1[t_0,t_1]$ такие, что $\left|g(t,z)\right| \le \bar{a}(t) + \bar{\beta}(t)\|z\|$ при $t \in [t_0,t_1]$, $z \in X$, то функционал $J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ непрерывен в $L_\infty([t_0,t_1],X)$ ($C([t_0,t_1],X)$ и $W_p^1([t_0,t_1],X)$).

Следствие 2.1. Если g нормальный выпуклый интегрант, существуют $a(.),\ \beta(\cdot) \in L_1[t_0,t_1]$ такие, что $a(t) + \beta(t)\|z\| \le g(t,z)$ при $z \in X$, то $J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ непрерывен в $\operatorname{int} \operatorname{dom}_{L_\infty} J$ ($\operatorname{int} \operatorname{dom}_{C([t_0,t_1],X)} J$, $\operatorname{int} \operatorname{dom}_{W_p^1} J$) относительно нормированной топологии простран-ства $L_\infty([t_0,t_1],X)$ ($C([t_0,t_1],X)$ и $W_p^1([t_0,t_1],X)$), где $\operatorname{dom}_{L_\infty} J = \{x(\cdot) \in L_\infty([t_0,t_1],X) : J(x) < +\infty\}$

Справедливость следствие следует из следствия 1.2.5[5, с.23] .

3. Субдифференциал интегрального функционала

Пусть X сепарабельное банахово пространство, $1 \le p < \infty$.

Отметим, что если $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$, то $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} z(s)ds$, где $x_0 \in X$ и $z(\cdot) \in L_p([t_0,t_1],X)$. Поэтому всякий линейный непрерывный функционал z^* (т.е. $z^* \in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$) на пространстве $W_p^1([t_0,t_1],X)$, $1 \le p < \infty$, можно единственным образом представить в виде $z^*(x) = \langle a, x(t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \upsilon(t), \dot{x}(t)\rangle dt$, где $a \in X^*,\ \upsilon(\cdot) \in L_{p'}([t_0,t_1],X^*),\ pp' = p + p'$. Функционал z^* в дальнейшем обозначается символом (a,υ).

Линейный непрерывный функционал $z^* \in L_\infty([t_0,t_1],X)^*$ называется «абсолютно непрерывным», если $\langle z^*, y(\cdot)\rangle = \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle z^*(t), y(t)\rangle dt$ для всяких $y(\cdot) \in L_\infty([t_0,t_1],X)$, где $z^*(\cdot) \in L_1([t_0,t_1],X^*)$.

Отметим, что каждый функционал $z^* \in L_\infty[t_0,t_1],X)^*$ единственным образом разлагается в сумму $z^* = z_1^* + z_2^*$, где функционалы $z_1^*,\ z_2^*$ - абсолютно непрерывны и сингулярны относительно меры dt в $[t_0,t_1]$ соответственно (см.[7, с.59]). Пусть

$$C([t_0,t_1],X)^{\perp}=\{z^*\in L_\infty([t_0,t_1],X)^*:\langle z^*,x(\cdot)\rangle=0 \text{ при } x(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)\}.$$

Обозначим через P факторпространство $L_\infty([t_0,t_1],X)^*/C([t_0,t_1],X)^{\perp}$, а через γ -каноническое отображение из $L_\infty([t_0,t_1],X)^*$ на P. Известно, что (см.[12, с.224]) $C([t_0,t_1],X)^*=P$.

Если $\psi:X\to R_{+\infty}$, $\bar{x}\in\{x\in X:\psi(x)<+\infty\}$, то через $\partial\psi(\bar{x})$ обозначим субдифференциал функции $\psi(x)$ в точке $\bar{x}$ в смысле выпуклого анализа, а также положим $\psi^*(p)=\sup\{\langle p,x\rangle-\psi(x):x\in X\}$ при $p\in X^*$ (см.[5, с.26]), где $R_{+\infty}=(-\infty,+\infty]$.

Замечание 3.1. Для сохранения аналогий между минимизацией в пространствах $n-$мерных абсолютно непрерывных и банаховозначных абсолютно непрерывных функций правильные меры будем обозначать также через $q(\cdot),\ \psi(\cdot),\ \varphi(\cdot)$ (см. [7, с. 61]).

Отметим, что всякий линейный непрерывный функционал $y_q^*\in C([t_0,t_1],X)^*$ порождается некоторой правильной мерой $q(\cdot)$, где $q(\cdot)=\psi(\cdot)+\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывная, а $\varphi(\cdot)$-сингулярная относительно dt правильные меры (см. [7, с. 62]). Из [7, с. 62] следует, что

$$y_q^*(y(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),q(dt)\rangle=\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\psi(dt)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle$$

при $y(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$. Так как $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера, то существует такая функция $h(\cdot)\in L_1([t_0,t_1],X^*)$, что $\psi(E)=\int_E h(t)dt$, где $E\subset[t_0,t_1]$ измеримое множество. Для удобства обозначим $h(t)$ через $\dot{\psi}(t)$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\psi(dt)\rangle=\int_{t_0}^{t_1}y(t)d\psi(t)=\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\dot{\psi}(t)\rangle dt$$

при $y(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$. Положим $\dot{q}(t)=\dot{\psi}(t)$.

Пусть $g:[t_0,t_1]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант. Положим

$$Q=\mathrm{dom}_C J=\{y(\cdot)\in C([t_0,t_1],X):J(y(\cdot))<+\infty\},\quad Q_1=\mathrm{dom}_{L_\infty}J=\{y(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X):J(y(\cdot))<+\infty\}.$$

Из теорем 4.2 и 5.2[7, с.24] следует, что если $J(x)=\int_{t_0}^{t_1}g(t,x(t))dt$ непрерывный функционал в некоторой точке $\bar{x}(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$, то $\partial_C J(x_0)=\gamma(D(x_0(\cdot))+N(x_0(\cdot),\mathrm{dom}_C J)$ для всякого $x_0(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$, где $D(x_0(\cdot))$ множество абсолютно непрерывных функционалов из $L_\infty([t_0,t_1],X)^*$, плотности которых почти всюду принадлежит $\partial g(t,x_0(t))$, $N(x_0(\cdot),\mathrm{dom}_C J)$ нормальный конус к $\mathrm{dom}_C J$ в точке $x_0(\cdot)$.

Из леммы 4.2[7, с.23] следует, что $y_q^*\in\partial J(\bar{y})$, где $y_q^*=y_\psi^*+y_\varphi^*$, $q(\cdot)=\psi(\cdot)+\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывная, а $\varphi(\cdot)$-сингулярная относительно dt правильные меры, то $y_\psi^*\in\gamma(D(x_0(\cdot))$ и $y_\varphi^*\in N(x_0(\cdot),\mathrm{dom}_C J)=\gamma(N(x_0(\cdot),\mathrm{dom}_{L_\infty}J)$.

В п.3 будем считать, что $J(x)=\int_{t_0}^{t_1}g(t,x(t))dt$ собственный функционал и непрерывен в $\mathrm{int}\,Q$. Если $g(t,x)$ $L\times B$-измерима, $x\to g(t,x)$ выпуклая функция, функционал $J(y(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}g(t,y(t))dt$ конечен в точке $\bar{y}(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$ и существуют число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$ такие, что $\sup\{g(t,\bar{y}(t)+x):x\in X,\ \|x\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$, то $\mathrm{int}\,Q\ne\varnothing$, J собственный выпуклый функционал

и непрерывен в $\operatorname{int} Q$ относительно нормированной топологии пространства $C([t_0,t_1],X)$ (см. предложение 1.2.5[5, с.21]).

Лемма 3.1. Если g выпуклый нормальный интегрант на $[t_0,t_1]\times X$ и $\operatorname{int} Q\neq\varnothing$, то

$$J^*(y_q^*)=\sup_{y\in Q}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),q(dt)\rangle-J(y)\right\}=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_Q^*(z_\varphi^*),$$

где $q(\cdot)$ правильная мера, $q(\cdot)=\psi(\cdot)+\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывная, а $\varphi(\cdot)$ -сингулярная относительно dt правильные меры, $\delta_Q(y)$ - индикаторная функция множества Q, $\delta_Q^*(z_\varphi^*)=\sup\limits_{y\in Q}\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle$.

Доказательство. Из свойства интеграла Лебега вытекает, что

$$J^*(y_q^*)=\sup_{y\in Q}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t),y(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle-\int_{t_0}^{t_1}g(t,y(t))dt\right\}\le$$

$$\le\sup_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X)}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t)),z(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}g(t,z(t))dt-\delta_{C([t_0,t_1],X)}(z)\right\}+\delta_Q^*(z_\varphi^*)\le \tag{3.1}$$

$$\le\sup_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X)}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t),z(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}g(t,z(t))dt\right\}+\delta_Q^*(z_\varphi^*)=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_Q^*(z_\varphi^*).$$

По теореме 1.3.8 [4, с.51] существует такой функционал $\upsilon_S^*\in L_\infty([t_0,t_1],X)^*$, что $\upsilon_S^*=z_\varphi^*$ на $C([t_0,t_1],X)$. Легко проверяется, что υ_s^* сингулярный функционал. Поэтому если $J^*(y_q^*)<+\infty$, то по теореме 3.4.1 [6, с.188] существует функционал $x^*\in L_\infty([t_0,t_1],X)^*$ такой, что

$$J^*(y_q^*)=\sup_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X)}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t),z(t)\rangle dt+\upsilon_S^*(z)-\int_{t_0}^{t_1}g(t,z(t))dt-\delta_{C([t_0,t_1],X)}(z)\right\}=$$

$$=\sup_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X)}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t),z(t)\rangle dt+\langle\upsilon_s^*,z\rangle-\langle x^*,z\rangle-\int_{t_0}^{t_1}g(t,z(t))dt\right\}+\sup_{y\in C([t_0,t_1],X)}\langle x^*,y\rangle.$$

Так как $J^*(y_q^*)<+\infty$, то $\sup\{\langle x^*,y\rangle : y\in C([t_0,t_1],X)\}=0$, т.е. $\langle x^*,y\rangle=0$ при $y\in C([t_0,t_1],X)$. Отсюда вытекает, что x^* сингулярный функционал. Аналогично теореме 1 [13] (см. также доказательство теоремы 8.3.1[6, с.357]) имеем

$$J^*(y_q^*)=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_{Q_1}^*(\upsilon_S^*-x^*).$$

Ясно, что

$$J^*(y_q^*)=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_{Q_1}^*(\upsilon_S^*-x^*)\ge\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_Q^*(z_\varphi^*). \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) вытекает, что $J^*(y_q^*)=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_Q^*(z_\varphi^*).$

Так как $J^*(y_q^*)\le\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_Q^*(z_\varphi^*)$, то случай $J^*(y_q^*)=+\infty$ очевиден. Лемма доказана.

Отметим, что если $g(t,x)$ измеримый интегрант, $g(t,x)$ $L\times B$ -измерима на $[t_0,t_1]\times X$ и $Q_1\neq\varnothing$, то аналогично теореме 8.3.1[6, с.357] проверяется, что

$$\sup_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X)}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t),z(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}g(t,z(t))dt\right\}=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt.$$

Следствие 3.1. Пусть g выпуклый нормальный интегрант на $[t_0,t_1]\times X$ и $\operatorname{int}Q\neq\varnothing$.

Тогда $y_q^*\in C([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит множеству $\partial J(\bar y)$ в том и только в том случае, когда $\dot\psi(t)\in\partial g(t,\bar y(t))$ и $\delta_Q^*(z_\varphi^*)=\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar y(t),\varphi(dt)\rangle$, где $q(\cdot)$ правильная мера, $q(\cdot)=\psi(\cdot)+\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывная, а $\varphi(\cdot)$-сингулярная относительно dt правильные меры, $\delta_Q(y)$- индикаторная функция множества Q, $\delta_Q^*(z_\varphi^*)=\sup_{y\in Q}\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle$.

Доказательство. Известно, что $y_q^*\in\partial J(\bar y)$ в том и только в том случае, когда

$$\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\delta_Q^*(z_\varphi^*)+\int_{t_0}^{t_1}g(t,\bar y(t))dt=\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar y(t),\varphi(dt)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar y(t),\dot\psi(t)\rangle dt.$$

Используя неравенства Фенхеля (см. [6, с.183]) имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,\dot\psi(t))dt+\int_{t_0}^{t_1}g(t,\bar y(t))dt=\int_{t_0}^{t_1}(\bar y(t)|\dot\psi(t))dt,\quad \delta_Q^*(z_\varphi^*)=\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar y(t),\varphi(dt)\rangle.$$

Поэтому $g^*(t,\dot\psi(t))+g(t,\bar y(t))=(\bar y(t)|\dot\psi(t))dt.$ Отсюда следует справедливость следствия 3.1.

Отметим, что справедливость следствия 3.1 также следует из теоремы 4.2[7, с.24].

Замечание 3.2. Отметим, что $\dot q(t)=\dot\psi(t)$ и если $\bar y(\cdot)\in\operatorname{int}Q$, то $\varphi(t)\equiv 0$. Если Z плотное подпространство в $C([t_0,t_1],X)$, то заменяя $C([t_0,t_1],X)$ на Z повсюду, легко проверить, что утверждения аналогичные лемме 3.1 и следствию 3.1 верны также и в Z, где надо поло-жить $Q=\{y(\cdot)\in Z: J(y(\cdot))<+\infty\}$. Кроме того в лемме 3.1 и следствии 3.1 условие нормальности интегранта $g(t,x)$ можно заменить условием- $g(t,x)$ $L\times B$-измерима на $[t_0,t_1]\times X$.

Отметим, что если $g:[t_0,t_1]\times X\to R_{+\infty}$ $L\times B$-измерима , то $g(t,x(t))$ измерима для любого $x(\cdot)\in L_1([t_0,t_1],X)$. Также отметим, что если $g(t,x)$ выпуклый интегрант, функция $t\to g(t,x)$ измерима при всяком $x\in X$, существуют функция $x_0(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)$, число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)$ такие, что $\sup_{\|x\|\le\varepsilon}g(t,x_0(t)+x)\le r(t)$, то аналогично а) предложению 8.1.7[6] проверяется, что $g(t,x)$ измеримый интегрант. Поэтому если $u(\cdot)\in L_1([t_0,t_1],X)$ и $\upsilon_S^*\in L_\infty([t_0,t_1],X)^*$, где υ_s^* сингулярный функционал и $g(t,x)$ $L\times B$-измерима на $[t_0,t_1]\times X,$ то аналогично теореме 1[13, с.175] имеем

$$\sup_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X)}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\langle u(t),z(t)\rangle dt+\upsilon_S^*(z)-\int_{t_0}^{t_1}g(t,z(t))dt\right\}=\int_{t_0}^{t_1}g^*(t,u(t))dt+\sup_{z\in Q_1}\upsilon_S^*(z).$$

Отметим, что положительно однородная выпуклая функция называется сублинейной.

Следствие 3.2. Пусть $x\to g(t,x)$ сублинейная функция, $g(t,x)$ $L\times B-$измерима и $\operatorname{int}Q$ непусто. Тогда $y_q^*\in C([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит множеству $\partial J(0)$ в том и только в том случае, когда $\dot\psi(t)\in\partial g(t,0)$ и $\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle\le 0$ для любого $y(\cdot)\in Q$.

Доказательство.Так как $x\to g(t,x)$ сублинейная функция, то $J(x)$ сублинейный функционал. Поэтому Q конус в $C([t_0,t_1],X)$. Из $\partial J(0)\neq\varnothing$ следует, что $\delta_Q^*(z_\varphi^*)=\sup_{y\in Q}\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle\le 0$. Отсюда имеем, что $\int_{t_0}^{t_1}\langle y(t),\varphi(dt)\rangle\le 0$ для любого $y(\cdot)\in Q$. Следствие доказано.

В дальнейшем, будем говорить, что $y^* \in C([t_0,t_1],X)^*$ и $z^* \in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$ совпадают, если $y^*(x) = z^*(x)$ при $x \in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Множество $W_p^1([t_0,t_1],X)$ с нормой $\|x(\cdot)\| = \max\limits_{t_0 \le t \le t_1} \|x(t)\|$ обозначим $C_p^1([t_0,t_1],X)$. Ясно, что $C_p^1([t_0,t_1],X)^* \subset W_p^1([t_0,t_1],X)^*$.

Пусть $\varphi : W_p^1([t_0,t_1],X) \to R_{+\infty}$ выпуклый функционал. Субдифференциал функционала φ в точке $\overline{x}$ относительно пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$ (относительно $C_p^1([t_0,t_1],X)$ обозначим через $\partial_W \varphi(\overline{x})$ $(\partial_C \varphi(\overline{x}))$. Из определения субдифференциала следует, что $\partial_C \varphi(\overline{x}) \subset \partial_W \varphi(\overline{x})$.

Замыкание и внутренность множества M в пространстве $W_p^1([t_0,t_1],X)$ ($C_p^1([t_0,t_1],X)$) обозначим соответственно $cl_W M$ и $int_W M$ $(cl_C M,\ int_C M)$.

Если $\varphi : W_p^1([t_0,t_1],X) \to R_\infty$, то положим

$$\operatorname{dom}\varphi = \operatorname{dom}_{W_p^1} \varphi = \operatorname{dom}_{C_p^1} \varphi = \{x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X) : \varphi(x) < +\infty)\}.$$

Лемма 3.2. Если φ полунепрерывный снизу (пн. сн.) собственный сублинейный функционал в $C_p^1([t_0,t_1],X)$, то $\partial_C \varphi(\overline{x}) = \partial_W \varphi(\overline{x})$.

Доказательство. По теореме Хермандера (см.[6, с.203])

$$\varphi(x) = \sup\{y^*(x) : y^* \in \partial_C \varphi(0)\}, \quad x \in C_p^1([t_0,t_1],X).$$

Ясно, что $C_p^1([t_0,t_1],X)^* \subset W_p^1([t_0,t_1],X)^*$. Поэтому $\partial_C \varphi(0) \subset W_p^1([t_0,t_1],X)^*$. Ясно, что множество $\partial_C \varphi(0)$ замкнуто в $W_p^1([t_0,t_1],X)^*$ относительно топологии $\sigma(W_p^1([t_0,t_1],X)^*, W_p^1([t_0,t_1],X)$. Отсюда, по определению субдифференциала получим $\partial_C \varphi(0) = \partial_W \varphi(0)$. Лемма доказана.

Следствие 3.3. Если φ собственный сублинейный функционал в $C_p^1([t_0,t_1],X)$ и $cl_C \varphi = cl_W \varphi$, то $\partial_C \varphi(0) = \partial_W \varphi(0)$.

Следствие 3.4. Если φ собственный сублинейный функционал в $C_p^1([t_0,t_1],X)$ и $int_C \operatorname{dom}\varphi = int_W \operatorname{dom}\varphi \ne \varnothing$, то $cl_C \varphi = cl_W \varphi$.

Доказательство. Из условия следует, что $int_C \operatorname{ep}\varphi = int_W \operatorname{ep}\varphi$ (см. теорему 3.2.1[6], с.181). Кроме того из теоремы 1.6.3 [4, с.163] вытекает, что $cl_C \operatorname{ep}\ \varphi = cl_C\ int_C \operatorname{ep}\ \varphi$. Пусть $(\overline{z},\overline{\alpha}) \in cl_C \operatorname{ep}\ \varphi$, $(z,\alpha) \in int_C \operatorname{ep}\ \varphi$ и $0 < \lambda < 1$. Тогда $(1-\lambda)(\overline{z},\overline{\alpha}) + \lambda(z,\alpha) \in int_W \operatorname{ep}\ \varphi$. Поэтому $(\overline{z},\overline{\alpha}) \in cl_W\ int_W \operatorname{ep}\ \varphi$. Отсюда вытекает, что $(\overline{z},\overline{\alpha}) \in cl_W \operatorname{ep}\varphi$, т.е. $cl_C \operatorname{ep}\ \varphi \subset cl_W \operatorname{ep}\ \varphi$. Аналогично проверяется, что $cl_W \operatorname{ep}\ \varphi \subset cl_C \operatorname{ep}\ \varphi$. Тогда имеем, что $cl_C \varphi = cl_W \varphi$. Следствие доказано.

Следствие 3.5. Если φ собственный выпуклый функционал в $C_p^1([t_0,t_1],X)$, φ непрерывен в $int_C \operatorname{dom}\varphi$, $int_C \operatorname{dom}\ \varphi = int_W \operatorname{dom}\ \varphi \ne \varnothing$, $\partial_C \varphi(\overline{x})$ или $\partial_W \varphi(\overline{x})$ непусто, то $cl_C \varphi'(\overline{x};\cdot) = cl_W \varphi'(\overline{x};\cdot)$.

Доказательство. Так как $\partial_W \varphi(\overline{x}) \ne \varnothing$, то $\varphi'(\overline{x};\cdot)$ собственный выпуклый функционал и $\overline{x} \in \operatorname{dom}\varphi$. Поэтому $\varphi'(\overline{x};x) \le \varphi(\overline{x}+x) - \varphi(\overline{x})$ для всех x. Если $x_1 \in int_W \operatorname{dom}\varphi - \overline{x}$, то φ ограничена сверху некоторым числом d в достаточно малой окрестности V точки $\overline{x} + x_1$. Поэтому для всякого $x \in V - \overline{x}$ выполнено неравенство $\varphi'(\overline{x};x) \le \varphi(\overline{x}+x) - \varphi(\overline{x}) \le d - \varphi(\overline{x})$, т.е. $\varphi'(\overline{x};.)$ конечна и ограничена на $V - \overline{x}$ и следовательно, по теореме 3.2.1 [6,с.181] непрерывна в точке x_1. Тогда из предложения 4.1.4[6, с.206] вытекает, что $\varphi'(\overline{x};.)$ непрерывен относительно нормы в $W_p^1([t_0,t_1],X)$ (относительно нормы в $C_p^1([t_0,t_1],X)$) во всех точках конуса $K_{(int_W \operatorname{dom}\varphi - \overline{x})}$ порожденного множеством $int_W \operatorname{dom}\varphi - \overline{x}$, за исключением, возможно, начала координат. Поэтому применяя следствие 3.4 имеем справедливость следствия 3.5. Следствие доказано.

Следствие 3.6. Если $x \to g(t,x)$ сублинейная функция, $g(t,x)$ $L \times B$-измерима, $\partial_C J(0)$ и $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J$ непусты, J непрерывен в $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J$, то $\operatorname{cl}_C J'(0;x) = \operatorname{cl}_W J'(0;x) \geq \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{cl} g(t,x(t))dt$ при $x(\cdot) \in C_p^1([t_0,t_1],X)$.

Доказательство. Так как $\partial_C J(0) \neq \varnothing$, то существует суммируемая функция $\upsilon(\cdot) \in L_1([t_0,t_1],X)$ такая, что $\upsilon(t) \in \partial g(t,0)$, т.е. $g(t,x) \geq \langle \upsilon(t), x \rangle$ при $x \in X$. Тогда из леммы Фату следует, что функционал $\tilde{J}(x) = \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{cl} g(t,x(t))dt$ полунепрерывен снизу на $C_p^1([t_0,t_1],X)$ (анало-гично $a)$ предложению 8.1.7[6,с.344] имеем, что $\operatorname{cl} g(t,x)$ выпуклый нормальный интегрант). Из следствия 3.5 следует, что $\operatorname{cl}_C J'(0;x) = \operatorname{cl}_W J'(0;x)$. Кроме того из леммы Фату имеем, что $\operatorname{cl}_C J'(0;x) = \operatorname{cl}_W J'(0;x) \geq \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{cl} g(t,x(t))dt$. Следствие доказано.

Пусть выполняется условие следствия 3.6 и $X = R^n$, то из предложения 9.1.2 и 9.2.2[5, с. 267, с.272] следует, что $\operatorname{cl}_C J'(0;x) = \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{cl} g(t,x(t))dt$. Если $X = R^n$, $g(t,x)$ $L \times B$-измерима на $[t_0,t_1] \times R^n$ и $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J$ непусты, то J непрерывен в $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J$.

Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1] \times X$, функционал $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$ конечен в точке $x_0(\cdot) \in L_\infty([t_0,t_1],X)$, то из теоремы 4.1 [7, с.22] следует, что $\partial_{L_\infty} J(x_0) = D(x_0(\cdot) + N(x_0(\cdot),Q_1)$, где $D(x_0(\cdot))$ множество абсолютно непрерывных функционалов из $L_\infty([t_0,t_1],X)^*$, плотности которых почти всюду принадлежит $\partial g(t,x_0(t))$, $N(x_0(\cdot),Q_1)$ нормальный конус к Q_1 в точке $x_0(\cdot)$, $Q_1 = \operatorname{dom}_{L_\infty} J$.

Из леммы 4.2[7, с.23] следует, что если $z^* \in \partial_{L_\infty} J(\bar{y})$, где $z^* = z_1^* + z_2^*$, функционалы z_1^*, z_2^* - абсолютно непрерывны и сингулярны относительно меры dt в $[t_0,t_1]$ соответственно, то $z_1^* \in D(x_0(\cdot))$ и $z_2^* \in N(x_0(\cdot),Q_1)$. Так как $\langle z_1^*, y(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle z_1^*(t), y(t) \rangle dt$ при $y(\cdot) \in L_\infty([t_0,t_1],X)$, где $z_1^*(\cdot) \in L_1([t_0,t_1],X^*)$, то из $z_1^* \in D(x_0(\cdot))$ следует, что $z_1^*(t) \in \partial g(t, x_0(t))$.

Функционал $x^* = (a,\psi) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$ назовем "абсолютно непрерывным", если $\psi \in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$, $\psi(t_0) = a$ и $\psi(t_1) = 0$.

Обозначим $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Лемма 3.3. Если $g(t,\cdot)$ сублинейная функция при $t \in [t_0,t_1]$, $t \to g(t,x)$ измеримая функция при $x \in X$ и существует суммируемая функция $r(t)$ такая, что $\sup_{x \in B} g(t,x) \leq r(t)$, то $\bar{x}^* = (\bar{a},\bar{\psi}) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит $\partial J(0)$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}^*$ "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\bar{\psi}}(t) \in \partial g(t,0)$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_\infty([t_0,t_1],X)$ функционал $\bar{J}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t,u(t))\,dt$. Ясно,что $\bar{J}_g$ сублинейный и по лемме 2.3 непрерывный функционал на $L_\infty([t_0,t_1],X)$. Поэтому по предложению 4.2.3[6, с.210] $\partial \bar{J}(0)$ слабо*компактно, а из теоремы 4.1[7, с.22] следует, что $\partial \bar{J}(0) \subset L_1([t_0,t_1],X^*)$. По предложению 4.1.1 [6, с.203] имеем

$$\bar{J}(u(\cdot)) = \max_{u^* \in \partial \bar{J}(0)} \langle u^*, u \rangle = \max_{u^* \in \partial \bar{J}(0)} \int_{t_0}^{t_1} \langle u^*(t), u(t) \rangle\, dt.$$

Пусть $x^* = (a,\varphi) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$. Положив $\psi(t) = \int_{t_0}^{t_1} u^*(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} u^*(s)\,ds$ и используя теорему о минимаксе 6.2.7[14, с.311] получим, что

$$J^*(x^*) = \sup_{x\in W_{1,1}^n}\left\{\langle a, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1}\langle \varphi(t), \dot{x}(t)\rangle dt - J(x)\right\} =$$

$$= \sup_{x\in W_{1,1}^n}\left\{\langle a, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1}\langle \varphi(t), \dot{x}(t)\rangle dt - \max_{u^*\in\partial\bar{J}(0)}\int_{t_0}^{t_1}\langle u^*(t), x(t)\rangle dt\right\} =$$

$$= \min_{-\dot{\psi}(\cdot)\in\partial\bar{J}(0)}\ \sup_{x\in W_{1,1}^n}\left\{\langle a-\psi(t_0), x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1}\langle \varphi(t)-\psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi(t) = \psi(t),\ a = \psi(t_0), \text{ где } -\dot{\psi}(\cdot)\in\partial\bar{J}(0),\ \psi(t_1) = 0, \\ +\infty, \quad \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Из теоремы 4.1[7, с.22] следует, что $-\dot{\psi}(\cdot)\in\partial\bar{J}(0)$ в том и только в том случае, когда $-\dot{\bar{\psi}}(t)\in\partial g(t,0)$. Отсюда получим, что $\bar{x}^* = (\bar{a},\bar{\psi}) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит $\partial J(0)$ тогда и только тогда, когда функционал $\bar{x}^*$ "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\bar{\psi}}(t)\in\partial g(t,0)$. Лемма доказана.

Ясно, что леммы 3.3 можно доказать также используя следствие 3.1.

Отметим, что если $g(t,x)$ $L\times B$-измерима на $[t_0,t_1]\times X$, $g(t,\cdot)$ сублинейная функ-ция при $t\in[t_0,t_1]$ и функционал $\bar{J}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t,u(t))dt$ непрерывен в точке $\bar{u}(\cdot) = 0$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty([t_0,t_1],X)$, то лемма 3.3 также верна.

Теорема 3.1. Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X$, $\bar{x}(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$, функционал $J(\bar{x}(\cdot))$ конечен и существует $\varepsilon > 0$ и суммируемая функция $r(t) > 0$, что $\sup_{\|z\|<\varepsilon} g(t,\bar{x}(t)+z) \le r(t)$ в $[t_0,t_1]$, то $\partial J(\bar{x}) \ne \varnothing$ и функционал $\bar{x}^* = (\bar{a},\bar{\psi}) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит $\partial J(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда функционал $\bar{x}^*$ "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\bar{\psi}}(t)\in\partial g(t,\bar{x}(t))$.

Доказательство. По условию функционал $J(x)$ непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому непустота $\partial J(\bar{x})$ вытекает из предложения 4.2.3([6, с.210]. Докажем второе утверждение леммы. Так как

$$g(t,\bar{x}(t)) - g(t,\bar{x}(t)-y(t)) \le \frac{g(t,\bar{x}(t)+\lambda y(t)) - g(t,\bar{x}(t))}{\lambda} \le g(t,\bar{x}(t)+y(t)) - g(t,\bar{x}(t))$$

при $0<\lambda<1$ и $\|y(t)\|\le\varepsilon$, $y(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$, то используя теорему 5.5.6 Лебега [10, с.346] о предельном переходе под знаком интеграла получим, что

$$J'(\bar{x};y) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{J(\bar{x}+\lambda y) - J(\bar{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{t_0}^{t_1}\frac{g(t,\bar{x}(t)+\lambda y(t)) - g(t,\bar{x}(t))}{\lambda}dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{g(t,\bar{x}(t)+\lambda y(t)) - g(t,\bar{x}(t))}{\lambda}dt = \int_{t_0}^{t_1} g'(t,\bar{x}(t);y(t))dt.$$

Так как $g(t,\bar{x}(t)) - g(t,\bar{x}(t)-x) \le g'(t,\bar{x}(t);x) \le g(t,\bar{x}(t)+x)) - g(t,\bar{x}(t))$ при $x\in X$, то из d) леммы 2.2 или замечания 2.1 следует, что функционал $y\to J'(\bar{x};y)$ конечен и непрерывен в $W_1^1([t_0,t_1],X)$. Если учесть, что $\partial J(\bar{x}) = \partial J'(\bar{x},0)$, $\partial g(t,\bar{x}(t)) = \partial g'(t,\bar{x}(t);0)$, то утверждение теоремы 3.1 следует из леммы 3.3. Теорема доказана.

Отметим, что если g $L\times B$-измеримый выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X$ и функ-ционал J конечен и непрерывен в точке $\bar{x}\in W_1^1([t_0,t_1],X)$, то теорема 2.1 также верна.

Теорема 3.2. Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X$ (или g $L\times B$-измеримый выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X$), выпуклый функционал J конечен и непрерывен в точке $\bar{x}\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ относительно топологии в $C_p^1([t_0,t_1],X)$, то $\partial_W J(\bar{x})$ непусто и функционал $x^*=(a,\psi)\in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит $\partial_W J(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда функционал x^* "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\psi}(t)\in\partial g(t,\bar{x}(t))$.

Доказательство. Непустота $\partial J(\bar{x})$ вытекает из предложения 4.2.3 [6, с.210]. Из теоремы 4.1.4 [6, с.206] следует, что $J'(\bar{x};x)$ конечен и непрерывен на $C_p^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому по лемме 3.2 имеем, что $\partial_C J(\bar{x})=\partial_W J(\bar{x})$. Из замечания 3.1 имеем, что если $y_q^*\in\partial_C J(\bar{x})$, то $\left\langle y_q^*,x\right\rangle=\int_{t_0}^{t_1}x(t)\,dq(t)$, где $q:[t_0,t_1]\to X^*$ абсолютно непрерывная функция и $\dot{q}(t)\in\partial g(t,\bar{x}(t))$. Тогда существует функционал $x^*\in\partial_W J(\bar{x})$, где $x^*=(a,\psi)\in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$, $a\in X^*$, $\psi(\cdot)\in L_{p'}([t_0,t_1],X^*)$, такой, что $\langle a,x(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt=\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{q}(t),x(t)\rangle dt$ при $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Положив $u(t)=q(t_1)-q(t)$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{q}(t),x(t)\rangle dt=-\int_{t_0}^{t_1}x(t)du(t)=\langle u(t_0),x(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle u(t),\dot{x}(t)\rangle dt.$$

Тогда ясно, что $\psi(t)=u(t)$, $a=u(t_0)$ и $\dot{\psi}(t)=\dot{u}(t)=-\dot{q}(t)$. Теорема доказана.

Отметим, что справедливость теоремы 3.1 следует также из теоремы 3.2.

Лемма 3.4. Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X$, то функцио-нал $J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}g(t,x(t))dt$ непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$, в том и только в том случае, когда функционал J непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $C([t_0,t_1],X)$ ($C_p^1([t_0,t_1],X)$).

Доказательство. Ясно, что если функционал J непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $C([t_0,t_1],X)$, то функцио-нал J непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Пусть функционал J непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$ относительно нормиро-ванной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$. Тогда из теоремы 3.1 следует, что $\partial J(\bar{x}(\cdot))\neq\varnothing$ и функционал $\bar{x}^*=(\bar{a},\bar{\psi})\in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$ принадлежит $\partial J(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда функционал $\bar{x}^*$ "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\bar{\psi}}(t)\in\partial g(t,\bar{x}(t))$. Поэтому $g(t,\bar{x}(t)+x)-g(t,\bar{x}(t))\geq-\langle\dot{\bar{\psi}}(t),x\rangle$ при $x\in X$. Так как функционал J непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([t_0,t_1],X)$, то существует $\delta>0$ такое, что $J(\bar{x}(\cdot)+x(\cdot))\leq J(x_0(\cdot))+1$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $\|x(\cdot)\|\leq\delta$. Пусть $z(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$, $\|z(\cdot)\|_C\leq\frac{\delta}{2}$. Так как множество $W_p^1([t_0,t_1],X)$ плотно в $C([t_0,t_1],X)$ при $p\geq1$, то существует последовательность $x_m(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ которая сходится к $z(\cdot)$ в $C([t_0,t_1],X)$ и $\|x_m(\cdot)\|_C\leq\delta$. Тогда имеем, что $g(t,\bar{x}(t)+x_m(t))-g(t,\bar{x}(t))\geq-\langle\dot{\bar{\psi}}(t),x_m(t)\rangle\geq-\delta\|\dot{\bar{\psi}}(t)\|_{X^*}$ при всех $m=1,2,\dots$. По условию $x\to g(t,x)$ пн. сн. функция. Поэтому $\varliminf_{m\to\infty}g(t,\bar{x}(t)+x_m(t))\geq g(t,\bar{x}(t)+z(t))$. Так как

$\overline{\psi}(t):[t_0,t_1]\to X^*$ абсолютно непрерывная функция, то функция $t\to\|\dot{\overline{\psi}}(t)\|$ суммируема. Из леммы Фату следует, что $1+J(\overline{x}(\cdot))\ge \varliminf\limits_{m\to\infty} J(\overline{x}(\cdot)+x_m(\cdot))\ge J(\overline{x}(\cdot)+z(\cdot))$. Таким образом $J(\overline{x}(\cdot)+z(\cdot))$ ограничен сверху в $z(\cdot)\in C([t_0,t_1],X)$, $\|z(\cdot)\|_C\le\frac{\delta}{2}$ и следовательно, непрерывен в точке $\overline{x}(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $C([t_0,t_1],X)$. Лемма доказана.

Если g нормальный выпуклый интегрант на $[t_0,t_1]\times X$, то из леммы 3.4 следует, что $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J=\operatorname{int}_W \operatorname{dom} J$, где $J(x(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} g(t,x(t))dt$.

4. О субдифференцируемости терминального функционала

Пусть $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$. Рассмотрим в пространстве $W_1^1([t_0,t_1],X)$ функционал вида $J(x)=\varphi(x(t_0),x(t_1))$ и определим условия при которых $J^*(x^*)$ конечен.

Лемма 4.1. Если $a_1,a_2\in X$; $q(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X^*)$ и $\sup\limits_{\substack{x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)\\ x(t_0)=a_1,x(t_1)=a_2}}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),\dot{x}(t)\rangle dt<M$, то существует элемент $x^*\in X^*$ такой, что $q(t)=x^*$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Доказательство. Предположим, что $a_1=a_2=0,$ т.е. выполняется неравенство $\sup\limits_{\substack{x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)\\ x(t_0)=0,\ x(t_1)=0}}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),\dot{x}(t)\rangle dt<M.$ Отсюда следует, что $\sup\limits_{\substack{z(\cdot)\in W_1^1[t_0,t_1]\\ z(t_0)=0,\ z(t_1)=0}}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),x\rangle\dot{z}(t)dt=0$ при $x\in X$. Поэтому $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),x\rangle\dot{z}(t)dt=0$ при $z(t)\in W_1^1[t_0,t_1]$, $z(t_0)=z(t_1)=0$. Ясно, что $C_0^\infty(t_0,t_1)\subset W_1^1[t_0,t_1]$. Поэтому $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),x\rangle\dot{z}(t)dt=0$ при $z(\cdot)\in C_0^\infty(t_0,t_1)$. Отсюда следует, что $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),x\rangle\dot{z}(t)dt=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\langle q(t),x\rangle z(t)dt=0$ при $z(\cdot)\in C_0^\infty(t_0,t_1)$. Тогда получим, что $\frac{d}{dt}\langle q(t),x\rangle=0$ п.в. $t\in[t_0,t_1]$, где через $\frac{d}{dt}\langle q(t),x\rangle$ обозначена обобщенная производная функции $\langle q(t),x\rangle$. Отсюда по теореме 4.4.1[10, с.244)] имеем, что $\langle q(t),x\rangle=\text{const}$ при $x\in X$. Так как элементы x отделяют элементов пространства x^*, то существует элемент $x^*\in X^*$ такой, что $q(t)=x^*$ при $t\in[t_0,t_1]$.

Если $x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X),\ x(t_0)=a_1,\ x(t_1)=a_2$, то ясно, что

$$y(t)=x(t)-\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(a_2-a_1)-a_1\in \dot{W}_1^1([t_0,t_1],X),$$

где $\dot{W}_1^1([t_0,t_1],\ X)=\{z(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X):\ z(t_0)=0,\ z(t_1)=0\}$. Так как $x(t)=y(t)+\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(a_2-a_1)+a_1,$ то $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),\dot{x}(t)\rangle dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),\dot{y}(t)\rangle dt+\left\langle\frac{a_2-a_1}{t_1-t_0},\int\limits_{t_0}^{t_1}q(t)dt\right\rangle<M$. Поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t),\dot{y}(t)\rangle dt<M-\left\langle\frac{a_2-a_1}{t_1-t_0},\int\limits_{t_0}^{t_1}q(t)dt\right\rangle$$

при $y(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$, $y(t_0)=0,\ y(t_1)=0.$ Тогда имеем, что существует элемент $x^*\in X^*$ такой, что $q(t)=x^*$ при $t\in[t_0,t_1]$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. Если $J(x)=\varphi(x(t_0),x(t_1))$ и $J^*(x^*)$ конечен, где $x^*\in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$, $x^*=(a,q)$, то $q(t)=b\in X^*$ и $J^*(x^*)=\varphi^*(a-b,b)$.

Доказательство. Пусть $(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1))\in X\times X$ такая, что $\varphi(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1))<+\infty$. По определению

$$J^*(x^*) = \sup_{x\in W_1^1[t_0,t_1]} \{\langle a, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle q(t), \dot{x}(t)\rangle dt - \varphi(x(t_0), x(t_1))\} \geq$$

$$\geq \langle a, \bar{x}(t_0)\rangle - \varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) + \sup_{\substack{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)\\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),\ x(t_1)=\bar{x}(t_1)}} \int_{t_0}^{t_1} \langle q(t), \dot{x}(t)\rangle dt.$$

Так как $J^*(x^*)$ конечен, то отсюда вытекает, что $\sup_{\substack{x\in W_1^1([t_0,t_1],X),\\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),\ x(t_1)=\bar{x}(t_1)}} \int_{t_0}^{t_1} \langle q(t), \dot{x}(t)\rangle dt < +\infty.$ Поэтому из леммы 4.1 получим, что существует элемент $b \in X^*$ такой, что $q(t) = b$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Тогда имеем, что

$$J^*(x^*) = \sup_{x\in W_1^1[t_0,t_1]} \left\{\langle a, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle b, \dot{x}(t)\rangle dt - \varphi(x(t_0), x(t_1))\right\} =$$

$$= \sup_{x\in W_1^1[t_0,t_1]} \left\{\langle a, x(t_0)\rangle + \left\langle b, \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)dt\right\rangle - \varphi(x(t_0), x(t_1))\right\} =$$

$$= \sup_{x\in W_1^1[t_0,t_1]} \left\{\langle a-b, x(t_0)\rangle + \langle b, x(t_1)\rangle - \varphi(x(t_0), x(t_1))\right\} = \varphi^*(a-b, b).$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1. Если φ собственная выпуклая функция в $X \times X$, $J(x) = \varphi(x(t_0), x(t_1))$ и $x^* \in \partial J(\bar{x})$, где $x^* \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$, $x^* = (a,q)$, то $q(t) = b \in X^*$ и $(a-b,b) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1))$.

Доказательство. Так как $x^* \in \partial J(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда $J(\bar{x}) + J^*(x^*) = \langle x^*, \bar{x}\rangle$, то по лемме 4.2 имеем, что

$$\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) + \varphi^*(a-b, b) = \langle a, \bar{x}(t_0)\rangle + \left\langle b, \int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{x}}(t)dt\right\rangle.$$

Поэтому $\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) + \varphi^*(a-b, b) = \langle (a-b, b), (\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)\rangle$. Отсюда следует, что $(a-b,b) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1))$. Теорема доказана.

Теорема 4.1 верна также в пространстве $W_p^1([t_0,t_1],X)$.

5. Об обобщенной задаче Больца

Рассматривается задача минимизации функционала

$$\Phi_0(x(\cdot)) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \tag{5.1}$$

в классе абсолютно непрерывных функций $x:[t_0,t_1] \to X$, т.е. $x(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$, где $\varphi: X\times X \to R_{+\infty}$, $f:[t_0,t_1]\times X\times X \to R_{+\infty}$.

В дальнейшем в п. 5 будем предполагать, что $f:[t_0,t_1]\times(X\times X) \to R_{+\infty}$ нормальный выпуклый интегрант, $\varphi: X\times X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция. Функция $\bar{x}(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$ называется решением обобщенной задачи Больца (5.1), если $|\Phi_0(\bar{x}(\cdot))| < +\infty$ и справедливо неравенство $\Phi_0(x(\cdot)) \geq \Phi_0(\bar{x}(\cdot))$ при $x(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x,y) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + y(t))dt,$$

где $y(\cdot) \in L_1([t_0,t_1],X)$. Положим $h(y) = \inf_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)} \Phi(x,y)$. Из предложения 2.5 [11, с. 28] вытекает, что h выпуклая функция и $h(0) = \inf_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)} \Phi_0(x)$.

Лемма 5.1. Допустим, что $\inf\limits_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)} \Phi_0(x)$ конечен и существуют $x_0(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$, число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$, что $\sup\limits_{\|z\|\le\varepsilon} f(t,x_0(t)+z,\dot{x}_0(t))\le r(t)$ в $[t_0,t_1]$, а функция $\varphi(x_0(t_0),\cdot)$ непрерывна в точке $x_0(t_1)$. Тогда функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (5.1) стабильна (см. [5, с.60]).

Доказательство. Так как $J(x)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x_0(t)+x(t),\dot{x}_0(t))dt$ непрерывен в точке нуль в пространстве $W_1^1([t_0,t_1],X)$, то существуют числа $\alpha_1>0$ и L_1 такие, что $J(x)\le L_1$ при $x\in\{z(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X):\|z(t_0)\|+\int\limits_{t_0}^{t_1}\|\dot{z}(t)\|dt\le\alpha_1\}$. Также из непрерывности $\varphi(x_0(t_0),\cdot)$ получим, что существуют $\alpha_2>0$ и L_2, что $\varphi(x_0(t_0),b)\le L_2$ при $\|b-x_0(t_1)\|<\alpha_2,\ b\in X$.

Обозначив $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\},\ \ x_y(t)=x_0(t)-\int\limits_{t_0}^{t} y(s)ds$ получим

$$h(y)=\inf_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)}\Phi(x,y)\le\Phi(x_y,y)\le L_1+L_2$$

при $y(\cdot)\in L_1([t_0,t_1],X)$, $\|y\|\le\alpha$. Тогда из предложения 1.5.2[5, с.31] вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Лемма доказана.

Пусть Σ алгебра борелевских подмножеств в $[t_0,t_1]$. Множество всех правильных мер $q:\Sigma\to X^*$ обозначим через $frm([t_0,t_1],X^*)$ (см. [7, с.61]). Отметим, что всякая правильная мера $q:\Sigma\to X^*$ единственным образом разлагается в сумму: $q(\cdot)=\psi(\cdot)+\varphi(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ - абсолютно непрерывная, а $\varphi(\cdot)$ - сингулярная относительно dt правильные меры (см. [7, с.63]). По определению $\psi(E)=\int\limits_E\psi(t)dt$, где $\psi(\cdot)\in L_1([t_0,t_1],X^*)$. Положим $\dot{q}(t)=\dot{\psi}(t)$.

Пусть $w\in X,\ \upsilon\in X^*$. Положим $f^0(t,x,\upsilon)=\inf\limits_{y\in X}\{\langle\upsilon,y\rangle+f(t,x,y)\}$. Из условия следует, что $x\to f_1^0(t,x,\upsilon)$ выпуклая функция. Для простоты далее положим $\partial f_1^0(t,x,\upsilon)=\partial_x f_1^0(t,x,\upsilon)$.

Теорема 5.1. Для того, чтобы функция $\bar{x}(t)$ среди всех функций $x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$ минимизировала функционал (5.1) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in frm([t_0,t_1],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X^*)$ и векторы $\bar{a},\ \bar{b}\in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t)\in\partial f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})$

2) $f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})=\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{\bar{x}}(t)\rangle+f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$

3) $(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b})\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$

4) $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle y(t),q(dt)\rangle=\langle\bar{a},x(t_0)\rangle+\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt$ при $x\in W_1^1([t_0,t_1],X)$,

5) $\sup\limits_{y\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle y(t),q_s(dt)\rangle=\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\bar{y}(t),q_s(dt)\rangle$,

где $Q=\{y\in W_1^1([t_0,t_1],X):J_1(y(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1}f^0(t,y(t),\psi(t)+\bar{b})dt<+\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если выполнено условие леммы 5.1 и $\operatorname{int}_C\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_W\operatorname{dom}J_1$, то соотношения 1)-5) и являются необходимыми.

Доказательство. Достаточность. Из 1) следует, что

$$f^0(t,x,\psi(t)+\bar{b})-f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})\ge\langle\dot{q}(t),x-\bar{x}(t)\rangle$$

при $x\in X$. Отсюда, используя 2) имеем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{x}(t)\rangle dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt\ge\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\dot{q}(t),x(t)-\bar{x}(t)\rangle dt$$

при $x(\cdot)\in Q$. Из 3) следует, что

$$\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge\left\langle(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b}),(x(t_0),x(t_1))-(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\right\rangle$$

при $x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{x}(t)\right\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-$$

$$-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\dot{q}(t),x(t)-\bar{x}(t)\right\rangle dt+\left\langle(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b}),(x(t_0),x(t_1))-(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\right\rangle$$

при $x(\cdot)\in Q$. Используя 4) из последнего соотношения получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\langle(x(t)-\bar{x}(t)),q(dt)\right\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\bar{b},\dot{x}(t)\right\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\bar{b},\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-$$

$$-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\dot{q}(t),x(t)-\bar{x}(t)\right\rangle dt+\left\langle(-\bar{b},\bar{b}),(x(t_0),x(t_1))-(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\right\rangle$$

при $x(\cdot)\in Q$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\langle(x(t)-\bar{x}(t)),q(dt)\right\rangle+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\dot{q}(t),x(t)-\bar{x}(t)\right\rangle dt$$

при $x(\cdot)\in Q$. Из 5) следует, что $\int_{t_0}^{t_1}(x(t)-\bar{x}(t))dq_s(t)\le 0$ при $x(\cdot)\in Q$. Тогда получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge 0$$

при $x(\cdot)\in Q$.

Так как $\int_{t_0}^{t_1}f^0(t,x(t),\psi(t)+\bar{b})dt-\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{x}(t)\right\rangle dt\le\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt,$ то имеем, что $\{x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X):\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt<+\infty\}\subset Q$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge 0$$

при $x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Достаточность теоремы 5.1 доказана.

Необходимость. Из леммы 5.1 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль.

Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [5, с. 60, 62] вытекает, что решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи $\inf\{\Phi_0(x):x\in W_1^1([t_0,t_1],X\}$ и решение $(-\bar{z}(\cdot))$ задачи $\sup\limits_{z\in L_\infty([t_0,t_1],X^*)}\{-\Phi^*(0,z)\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{x},0)+\Phi^*(0,-\bar{z})=0 \tag{5.2}$$

Отсюда имеем $\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\Phi^*(0,-\bar{z})=0$. По определению

$$\Phi^*(0,-\bar{z}) = \sup_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X),\ y\in L_1^1([t_0,t_1],X)} \left\{ -\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t), y(t)\rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt - \varphi(x(t_0),x(t_1)) \right\} =$$

$$= \sup_{\substack{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)\\ y\in L_1^1([t_0,t_1],X)}} \left\{ -\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t), \dot{x}(t)+y(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t), \dot{x}(t)\rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt - \varphi(x(t_0),x(t_1)) \right\} =$$

$$= \sup_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)} \{ \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t), \dot{x}(t)\rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt - \varphi(x(t_0),x(t_1)) \}. \tag{5.3}$$

Обозначим $J_1(x) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt,$ $J_2(x) = \varphi(x(t_0),x(t_1))$. Из (5.2), (5.3) вытекает, что J_1 и J_2 собственные функционалы. Из предложения 2.5 [11, с.28] следует, что $x \to f^0(t,x,\bar{z}(t))$ выпуклая функция и аналогично теореме 8.1.4 или предложению 8.1.10 [6, с.345, 348] проверяется, что $f^0(t,y,\bar{z}(t))$ $L\times B$ - измерима. Так как $f^0(t,x_0(t)+z,\bar{z}(t)) \le \langle \bar{z}(t),\dot{x}_0(t)\rangle + f(t,x_0(t)+z,\dot{x}_0(t)) \le \langle \bar{z}(t),\dot{x}_0(t)\rangle + r(t)$ при $\|z\|\le\varepsilon$ в $[t_0,t_1]$, то при условии теоремы 5.1 имеем, что функционал J_1 непрерывен в точке $x_0(\cdot)$. По условию $J_2(x_0(\cdot))$ конечен.

Положив $\bar{z}^* = (0,\bar{z}(\cdot)) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$, $S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt + \varphi(x(t_0),x(t_1))$ имеем, что $\Phi^*(0,-\bar{z}) = S^*(\bar{z}^*)$. Используя неравенство Юнга-Фенхелья получим

$$S^*(\bar{z}^*) \ge \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x}), \qquad S(\bar{x}) \le \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt + \Phi_0(\bar{x}),$$

то отсюда получим, что $S^*(\bar{z}^*) \ge \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x}) \ge -\Phi_0(\bar{x}).$ Поэтому из соотношения (5.2) вытекает, что $S^*(\bar{z}^*) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x}),$ $S(\bar{x}) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt + \Phi_0(\bar{x}).$ Из второго соотношения имеем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt.$$

Отсюда получим, что

$$f^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t)) = \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle + f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)).$$

Из равенства $S^*(\bar{z}^*) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x})$ вытекает, что $\bar{z}^* \in \partial S(\bar{x})$. Из теоремы 0.3.3[6, с.59] (теорема Моро-Рокафеллара) имеем, что $\partial S(\bar{x}) = \partial J_1(\bar{x}) + \partial J_2(\bar{x})$. Тогда найдутся точки $\bar{z}_i^* \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$, где $i=1,2$, такие, что $\bar{z}^* = \bar{z}_1^* + \bar{z}_2^*,$ $\bar{z}_1^* = (\bar{a},\psi(\cdot)),$ $\bar{z}_2^* = (\bar{d},\bar{b})$ и $\bar{z}_1^* \in \partial J_1(\bar{x}),$ $\bar{z}_2^* \in \partial J_2(\bar{x})$. Из $\bar{z}_1^* \in \partial_W J_1(\bar{x})$ следует , что $J_1'(\bar{x};y)$ собственный функционал в $C_1^1([t_0,t_1],X)$. Так как $J_1(x)$ выпуклый функционал в $C_1^1([t_0,t_1],X)$ и непрерывен в точке $x_0(\cdot)$, то $J_1(x)$ непрерывен в $\mathrm{int}_C J_1(x)$ и $\mathrm{int}_C J_1(x) = \mathrm{int}_W J_1(x) \ne \varnothing.$ Поэтому используя следствие 3.5, имеем $\mathrm{cl}_C J_1'(\bar{x};y) = \mathrm{cl}_W J_1'(\bar{x};y).$ Тогда из следствия 3.3 вытекает, что $\partial_W J_1(\bar{x}) = \partial_C J_1(\bar{x})$. Поэтому существует функционал $\bar{z}_q^* \in C_1^1([t_0,t_1],X)^*$ такой, что $\bar{z}_1^* = \bar{z}_q^*$ и $\bar{z}_q^* \in \partial_C J_1(\bar{x})$. По следствию 3.1 и замечанию 3.1 $\bar{z}_q^* \in \partial_C J_1(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда $\dot{q}(t) \in \partial f^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t))$ и $\sup_{y\in Q} \int_{t_0}^{t_1} \langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{x}(t), q_s(dt)\rangle,$ где $q_s(\cdot)$ сингулярная часть меры $q(\cdot)$. Ясно, что

$$(0,\bar{z}(\cdot)) = (\bar{a},\psi(\cdot)) + (\bar{d},\bar{b}) \text{ и } \langle \bar{a}, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), q(dt)\rangle$$

для любого $x \in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому $\bar{z}(t) = \psi(t) + \bar{b}, \quad \bar{a} + \bar{d} = 0.$

Так как $\bar{z}_2^* \in \partial J_2(\bar{x})$, то из теоремы 4.1 следует, что $\bar{z}_2^* = (\bar{d},\bar{b})$, где $\bar{b} \in X^*$ и $(\bar{d}-\bar{b},\bar{b}) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$, где $\bar{d} = -\bar{a}$. Теорема доказана.

Отметим, что если $f:[t_0,t_1]\times(X\times X) \to R_{+\infty}$ нормальный интегрант и $\varphi: X\times X \to R_{+\infty}$ функция, то достаточность теоремы 5.1 также верна.

Если функционал $y \to f^0(t,y,\bar{z}(t))$ выпуклый нормальный интегрант, то из леммы 3.4 следует , что $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$.

Если функционал $J_1(x) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt$ удовлетворяет условиям леммы 2.2, то $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$.

Если существует функция $\lambda(\cdot) \in L_1[t_0,t_1]$ такая, что $\left|f^0(t,x_2,\bar{z}(t)) - f^0(t,x_1,\bar{z}(t))\right| \le \lambda(t)\|x_2 - x_1\|$ при $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f_t^0(\cdot,\bar{z}(t))$, то $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$.

Отметим, что если $X = R^n$, то из леммы 2.4 следует, что $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$.

Если при $x_0(t) = \bar{x}(t)$ удовлетворяется условие теоремы 5.1, то из теоремы 3.2 следует, что $q(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера. Тогда имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), q(dt)\rangle = \int_{t_0}^{t_1} x(t)d(q(t)-q(t_1)) = \langle q(t_1)-q(t_0), x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle q(t_1)-q(t), \dot{x}(t)\rangle dt$$

при $x \in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Так как $\int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), q(dt)\rangle = \langle \bar{a}, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt$ при $x \in W_1^1([t_0,t_1],X)$, то отсюда получим, что $\bar{a} = q(t_1) - q(t_0)$ и $\psi(t) = q(t_1) - q(t)$. Поэтому $\dot{q}(t) = -\dot{\psi}(t)$ и $\psi(t_0) = \bar{a}, \ \psi(t_1) = 0$. Обозначив $x^*(t) = \psi(t) + \bar{b}$ имеем, что $\bar{a} + \bar{b} = x^*(t_0), \ \bar{b} = x^*(t_1).$ Поэтому используя из теорему 3.1 или теорему 3.2 в доказательстве теоремы 5.1 имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 5.1. Для того чтобы $\bar{x}(t)$, среди всех абсолютно непрерывных функций $x:[t_0,t_1] \to X$ минимизировала функционал (5.1) достаточно, чтобы нашлась функция $x^*(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$ такая, что

1) $-\dot{\bar{x}}^*(t) \in \partial f^0(t,\bar{x}(t),\bar{x}^*(t))$, 2) $f^0(t,\bar{x}(t),\bar{x}^*(t)) = \langle \bar{x}^*(t), \dot{\bar{x}}(t)\rangle + f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$,

3) $(-\bar{x}^*(t_0), \bar{x}^*(t_1)) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1))$,

а если при $x_0(t) = \bar{x}(t)$ удовлетворяется условие леммы 5.1, то соотношения 1)-3) являются и необходимыми.

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Необходимость следствия 5.1 следует из доказательства теоремы 5.1. Аналогично доказательству теоремы 5.1 имеем, что $f^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t)) = \langle \bar{z}(t), \dot{\bar{x}}(t)\rangle + f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ и $\bar{z}^* \in \partial S(\bar{x})$, где $\bar{z}^* = (0,\bar{z}(\cdot))$. Из теоремы 0.3.3 [6, с.59] (теорема Моро-Рокафеллара) имеем, что $\partial S(\bar{x}) = \partial J_1(\bar{x}) + \partial J_2(\bar{x})$. Тогда найдутся точки $\bar{z}_i^* \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$, где $i=1,2,$ такие, что $\bar{z}^* = \bar{z}_1^* + \bar{z}_2^*, \ \bar{z}_1^* = (\bar{a},\psi(\cdot)), \ \bar{z}_2^* = (\bar{d},\bar{b})$ и $\bar{z}_1^* \in \partial J_1(\bar{x}), \quad \bar{z}_2^* \in \partial J_2(\bar{x})$. Из теоремы 3.1 следует, что $\bar{z}_1^* \in \partial_W J_1(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда $\bar{z}_1^* = (\bar{a},\psi)$ "абсолютно непрерывно" и $-\dot{\psi}(t) \in \partial f^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t))$ при $t \in [t_0,t_1]$. Из следствия 3.3 вытекает, что $\partial_W J_1(\bar{x}) = \partial_C J_1(\bar{x})$. Поэтому существует функционал $\bar{z}_q^* \in C_1^1([t_0,t_1],X)^*$ такой, что $\bar{z}_1^* = \bar{z}_q^*$ и $\bar{z}_q^* \in \partial_C J_1(\bar{x})$, т.е. $\langle \bar{a}, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), q(dt)\rangle$ при $x(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Так как функционал $\bar{z}_1^* = (\bar{a},\psi) \in W_1^1([t_0,t_1],X)^*$ абсолютно непрерывен, то $\psi \in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$, $\psi(t_0) = \bar{a}$ и $\psi(t_1) = 0$. Тогда имеем, что

$-\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{\psi}(t), x(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1}\langle x(t), q(dt)\rangle$ при $x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$. Отсюда имеем, что $q(\cdot)=-\psi(\cdot)$. Так как $\bar{z}_2^*\in\partial J_2(\bar{x})$, то из теоремы 4.1 следует, что $\bar{z}_2^*=(\bar{d},\bar{b})$, где $\bar{b}\in X^*$ и $(\bar{d}-\bar{b},\bar{b})\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$. Из равенства $\bar{z}^*=\bar{z}_1^*+\bar{z}_2^*$ имеем, что $\bar{z}(t)=\psi(t)+\bar{b}$, $\bar{d}=-\bar{a}$. Положив $\bar{x}^*(t)=\psi(t)+\bar{b}$ имеем, что $\bar{x}^*(t_0)=\psi(t_0)+\bar{b}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{x}^*(t_1)=\psi(t_1)+\bar{b}=\bar{b}$. Поэтому $(-\bar{x}^*(t_0),\bar{x}^*(t_1))\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$. Из $-\dot{\psi}(t)\in\partial f^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t))$ следует, что $-\dot{\bar{x}}^*(t)\in\partial f^0(t,\bar{x}(t),\bar{x}^*(t))$. Следствие доказано.

Отметим, что если $f:[t_0,t_1]\times(X\times X)\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант и $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ функция, то достаточность следствия 5.1 также верна.

Из следствия 5.1 следует, что верно следующее следствие 5.2.

Следствие 5.2. Для того чтобы $\bar{x}(t)$, среди всех абсолютно непрерывных функций $x:[t_0,t_1]\to X$ минимизировала функционал (5.1) достаточно, чтобы нашлась функция $z^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$ такая, что

1) $(\dot{z}^*(t), z^*(t))\in\partial f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$, 2) $(z^*(t_0),-z^*(t_1))\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$,

а если при $x_0(t)=\bar{x}(t)$ удовлетворяется условие леммы 5.1, то соотношения 1),2) являются и необходимыми.

Доказательство. Из включения $-\dot{\bar{x}}^*(t)\in\partial f^0(t,\bar{x}(t),\bar{x}^*(t))$ следует, что

$$f^0(t,x,\bar{x}^*(t))-f^0(t,\bar{x}(t),\bar{x}^*(t))\ge\left\langle-\dot{\bar{x}}^*(t), x-\bar{x}(t)\right\rangle$$

при $x\in X$. Так как $f^0(t,x,\upsilon)\le\langle\upsilon,w\rangle+f(t,x,w)$ при $w\in X$, то из соотношения 2) следствие 5.1 имеем

$$\left\langle\bar{x}^*(t),w\right\rangle+f(t,x,w)-\left\langle\bar{x}^*(t),\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle-f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\ge\left\langle-\dot{\bar{x}}^*(t), x-\bar{x}(t)\right\rangle$$

при $x\in X$, $w\in X$, т. е. $f(t,x,w)-f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\ge\left\langle-\dot{\bar{x}}^*(t), x-\bar{x}(t)\right\rangle+\left\langle-\bar{x}^*(t), w-\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle$ при $x\in X$, $w\in X$. Поэтому $(-\dot{\bar{x}}^*(t),-\bar{x}^*(t))\in\partial f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$. Обозначив $z^*(t)=-\bar{x}^*(t)$ получим, что $(\dot{z}^*(t), z^*(t))\in\partial f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$. Из соотношения 3) следствия 5.1 следует, что $(z^*(t_0),-z^*(t_1))\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$. Следствие доказано.

Замечание 5.1. При условиях теоремы 5.1, в теореме 5.1 абсолютно непрерывность меры $q(\cdot)\in frm([t_0,t_1],X^*)$, эквивалентна существованию решения задачи

1) $\dot{q}(t)\in\partial f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})$, 2) $f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})=\left\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle+f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$,

3) $(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b})\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$, 4) $\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{q}(t),x(t)\rangle dt=\langle\bar{a},x(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt$ при $x(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X)$,

где $\psi(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X^*)$, $\bar{a},\ \bar{b}\in X^*$.

Так как X сеперабельное пространство, везде интеграл понимается в смысле Бохнера.

Используя другое определение интеграла векторных функций (см.[15, с.89], [16, с.10]) полученные результаты можно обобщить и в том случае, когда X пространство Фреше.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений.-Канд. диссертация. -Баку, 1983.-116с.

2. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач.- Баку, Элм, 2002.-125 с.

3. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.-359 p.

4. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функцио- нальными уравнениями. -М. : Наука, 1977.-623 с.

5. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.- М.: Мир, 1979.-400 с.

6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, 1974.- 479с.

7. Иоффе А.Д., Левин В.Л.Субдифференциалы выпуклых функций. // Труды Московского Математического общества.- 1972, т.26, -с.3-73.

8. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом простран- стве.- Новосибирск: Наука, 1986.-296 с.

9. Федерер Г. Геометрическая теория меры.- М.: Наука, 1987.-760 с.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1989.-623 с.

11. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения.- М.: Мир, 1988.- 264 с.

12. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.-М.: ИЛ, 1959.

13. Рокафеллар Р.Т. Интегралы, являющиеся выпуклыми функцоналами, II. В

кн. Математическая экономика. -М.: Мир, 1974.-246 с.

14. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.- М.:Мир, 1988.- 510 с.

15. Рудин У. Функциональный анализ.- М.: Мир, 1975.-443 с.

16. Бурбаки Н. Иитегрирование.- М.:Наука, 1970.-320 с.