ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет

АННОТАЦИЯ

В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для экстремальных задач дифференциальных включений в прос-транстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала или области определения дифференциаль-ного включения.

ABSTRACT

The necessary and sufficient conditions for an extremum are obtained for extremal problems of differential inclusions in the space of Banach-valued absolute continuous functions. Note that the minimizing function in the general case is not an internal point of the domain of definition of a functional or domain of definition of a differential inclusion.

Ключевые слова: необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал, включение.

Key words: necessary condition, Lipschitz function, subdifferential, inclusion.

1. Введение

В работе применяется единая методика исследования экстремальных задач для дифференциальных включений (см.[1]-[3]). Схема получения необходимых условий состоит из нескольких этапов. Сначала изучается непрерывная зависимость решения дифференциального включения от возмущения. Затем исследуется выпуклая вариационная задача, заданная в соответствующем пространстве. Изучаются субдифференциал интегрального и терминального функционала в пространстве абсолютно непрерывных функций. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами (см. [4]), но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений. Далее рассматривается выпуклая экстремальная задача для включений. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала или области определения дифференциального включения.

Далее используя теоремы о непрерывной зависимости решения включений от возмущения, невыпуклая экстремальная задача для включений приведена к вариационной задаче и получено необходимое условие экстремума.

Работа является обобщением некоторых результатов работ автора в ([1], с.82-106, [2],с.263-344), где получены необходимые и достаточные условия минимума для экстремальной задачи дифференциальных включе-ний в пространстве $n-$ мерных абсолютно непрерывных функций. В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для дифферен-циальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непре-рывных функций. Работа является продолжением работы [5] автора.

2. О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ МИНИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В п. 2 получены необходимые и достаточные условия минимума для дифферен-циальных включений, изучен также случай, когда оптимальное решение не является внутренним.

1) О зависимости решений дифференциальных включений от правой части

Пусть X сепарабельное банахово пространство. Обозначим через $comp(X)$ совокупность всех непустых компактных подмножеств из X с метрикой Хаусдорфа, т.е. если $A,B\in comp(X)$, то через $\rho_X(A,B)$ абозначим расстояние Хаусдорфа между A и B. Для простоты далее отрезок $[t_0,t_1]$ заменим через $[0,T]$.

Пусть $a:[0,T]\times X\to 2^X$, где $T>0$, 2^X множество всех подмножеств X, причем $a(t,x)$ компактны при всех t,x.

Решением включения $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$ называется абсолютно непрерывное отображение $x:[0,T]\to X$ (т.е. $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$) удовлетворяющее включение $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$ для почти всех $t\in[0,T]$.

Лемма 2.1. Пусть $y(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ и $a(t,x)$ в области $t\in[0,T]$, $\|x-y(t)\|\le b$, удовлетворяют условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t,

в) существует такая суммируемая функция $k(t)$, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-y(t)\| \le b$, $\|x-y(t)\| \le b$, где ρ_x - хаусдорфово расстояние. Пусть $\|y(0)-x_0\| \le \delta < b$, $d(\dot{y}(t),a(t,y(t)) \le p(t)$, где $p(t)$ суммируема.

Тогда существует такое решение $x(t)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t)),\ x(0)=x_0$, что

$$\|x(t)-y(t)\| \le \xi(t), \quad \|\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\| \le k(t)\xi(t)+p(t),$$

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + \int_0^t e^{m(t)-m(s)}p(s)ds, \quad m(t) = \int_0^t k(s)ds,$$

при таких $t \in [0,T]$, что $\xi(t) \le b$.

Лемма доказывается аналогично доказательству теоремы 2.1.2 [6, с.41] , если привлечь леммы 2.1.4 [7, с.80] (см.[1], [8, с.100]).

Если в лемме 2.1 выполняется неравенство $\xi(T) \le b$, то легко проверяется, что

$$\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_1^1([0,T],X)} \le \max_{0\le t\le T}\xi(t) + \int_0^T (k(t)\xi(t)+p(t))dt \le (1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})\left(\delta + \int_0^T p(s)ds\right).$$

Лемма 2.2. Если - $x_0(t)$ решение задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t)),\ x(0)=x_0$ и $a(t,x)$ в области $t \in [0,T]$, $\|x-x_0(t)\| \le b$, удовлетворяют условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t,

в) существует такая суммируемая функция $k(t)$, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\| \le b$, $\|x-x_0(t)\| \le b$, где ρ_x - хаусдорфово расстояние.

Тогда существуют такие $\alpha > 0$ и решение $z_s(t)$ задачи $\dot{z}(t) \in a(t,z(t))+s(t),\quad z(0)=x_0$, где $s(\cdot) \in L_1([0,T],X),\ \|s(\cdot)\|_{L_1} \le \alpha$, что $\|z_s(t)-x_0(t)\| \le b$ при $t \in [0,T]$ и $\|z_s(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_1^1} \to 0$ при $\|s(\cdot)\|_{L_1} \to 0$.

Доказательство. Ясно, что $\rho_x(a(t,x)+s(t),\ a(t,x')+s(t)) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x-y(t)\| \le b$, $\|x'-y(t\| \le b$ и $d(\dot{x}_0(t),\ a(t,x_0(t))+s(t)) \le \|s(t)\|$. Поэтому по лемме 2.1 существует решение $z_s(t)$ задачи $\dot{z}(t) \in a(t,z(t))+s(t)$, $z(0)=x_0$ такое, что

$$\|x_0(t)-z_s(t)\| \le \int_0^T e^{m(t)-m(\tau)}\|s(\tau)\|d\tau \le e^{m(T)}\|s(\cdot)\|_{L_1}$$

при $t \in [0,T]$, где $m(t) = \int_0^t k(s)ds$. Если определять $\alpha > 0$ из неравенства $e^{m(T)}\alpha \le b$, то получим, что верна первая часть утверждения леммы.

Из леммы 2.1 получим, что

$$\|z_s(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_1^1} \le \int_0^T |\dot{x}_0(t)-\dot{z}_s(t)|dt \le \int_0^T (k(t)\int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\|s(\tau)\|d\tau +$$
$$+\|s(t)\|)dt \le m(T)e^{m(T)}\|s(\cdot)\|_{L_1} + \|s(\cdot)\|_{L_1} = \|s(\cdot)\|_{L_1^n}(m(T)e^{m(T)}+1),$$

т.е. $\|z_s(\cdot)-x_0(\cdot)\| \to 0$ при $\|s(\cdot)\|_{L_1} \to 0$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть E банахово пространство, $R:[0,T] \to 2^E$ много-значное отображение. Множество всех измеримых сечений $R(t)$ обозначим S_R. Счетное семейство $\{s_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset S_R$ называется представлением Кастена для $R(t)$, если $\mathrm{cl}\bigcup_{k=1}^{\infty} s_k(t) = R(t)$ при п.в. $t \in [0,T]$. Многозначное отображение

$R:[0,T]\to 2^E$ будем называть измеримым, если существует представление Кастена. Из определения непосредственно следует, что объединение не более чем счетного семейства измеримых многозначных отображений измеримо и замыкание измеримых отображений измеримо.

Отметим, что имеют разные определения измеримости многозначного отображения. В теореме 1.5.6[9, с.65] (в теореме 1[10, с.64]) доказано, что если $R(t)$ непустое компактное (замкнутое) множество при $t\in[0,T]$, то они совпадают.

Далее измеримость многозачного отображения будем понимать в смысле Кастена.

Замечание 2.2. Если X банахово пространство, $a:[0,T]\times X\to 2^X$ собственное замкнутое выпуклое отображение и образ $a^{-1}(t,\cdot)$ имеет непустую внутренность и $a^{-1}(t,\cdot)$ локально ограничено, то из следствия 3.3.3 [11, с.136] следует, что $a(t,\cdot)$ локально липшицево на $Int(Ima^{-1}(t,\cdot)$.

2) О необходимых и достаточных условиях минимума для выпуклых дифференциальных включений

Пусть X сепарабельное банахово пространство, $f:[0,T]\times X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $M\subset X$ выпуклое множество, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение, т.е. измеримое и замкнутозначное отображение и $Q(t)$ выпуклое множество при $t\in[0,T]$, $a:[0,T]\times X\to 2^X$ отображение такое, что $t\to gr\,a_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто и выпукло почти для всех $t\in[0,T]$, причем $a(t,x)$ компактны при всех $t, x.$ Отсюда следует, что $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$.

Отметим, что если отображение $x\to a(t,x)$ полунепрерывно сверху и $a(t,x)$ замкнутое множество при всех t, x, то из предложения 3.1.7[11, с.116] следует, что отображение $x\to a(t,x)$ замкнуто, т.е. множество gra_t замкнуто.

Рассмотрим минимизации функцинала

$$J(x)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \tag{2.1}$$

среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M\subset X,\ x(t)\in Q(t). \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.2) , минимизирующее функционал (2.1) среди всех решений задачи (2.2) назовем оптимальным. Требуется найти необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (2.1), (2.2). Поставленная задача эквивалентна следующей

$$\Phi_0(x)=\int_0^T(f(t,x(t),\dot{x}(t))+\delta_{Q(t)}(x(t))dt+\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T\omega(t,x(t),\dot{x}(t))dt+\delta_M(x(0))\overset{x\in W_1^1([0,T],X)}{\to}\min, \tag{2.3}$$

где $\omega(t,x,z)=\begin{cases}0, & \text{если } z\in a(t,x)\\ +\infty, & \text{если } z\notin a(t,x)\end{cases}=\begin{cases}0: & \text{если } (x,z)\in gra_t\\ +\infty: & \text{если } (x,z)\notin gra_t,\end{cases}$ $\delta_M(x)=\begin{cases}0: & \text{если } x\in M,\\ +\infty: & \text{если } x\notin M.\end{cases}$

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x,y)=\int_0^T(f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))+\delta_{Q(t)}(x(t))dt+\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T\omega(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt+\delta_M(x(0)),$$

где $y(\cdot)\in L_1([0,T],X)$, $a(t,x)$ компактны при всех $t\in[0,T]$, $x\in X$. Положим $h(y)=\inf\limits_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)}\Phi(x,y)$. Из предложения 2.5 [12, с. 28] вытекает, что h выпуклая функция.

Лемма 2.3. Если $\inf\limits_{x\in W_1^1([0,T],X)}\Phi_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное

отображение и $Q(t)$ непустое выпуклое множество при $t \in [0,T]$, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображение $t \to a(t,x)$ измеримо, существуют $\varepsilon > 0$ и решение $x_0(t)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t))$, $x(0) = x_0$, где $x_0 \in M$, такие, что $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset \operatorname{dom} a_t$, $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset Q(t)$ и $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t \in [0,T]$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$ и существует такая суммируемая функция $k(t)$, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x - x'\|$ при $\|x' - x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ и число $c > 0$ такие, что $f(t, x_0(t) + z, \upsilon) \le r(t) + c\|\upsilon\|$ при $z \in X, \|z\| \le \varepsilon$, $\upsilon \in X$, $t \in [0,T]$, функция $\varphi(x_0,\cdot)$ непрерывна в точке $x_0(T)$, то функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (2.3) стабильна (см. [4, с.60]).

Доказательство. Обозначим $S(x,y) = \int_0^T (f(t,x(t),\dot{x}(t) + y(t)) + \delta_{Q(t)}(x(t))dt$. Пусть $x(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$, $\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{W_1^1} < \varepsilon$, $x(0) = x_0(0)$ и $y(\cdot) \in L_1([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_1} < \varepsilon$. Тогда

$$S(x,y) = \int_0^T (f(t,x(t),\dot{x}(t) + y(t)) + \delta_{Q(t)}(x(t))dt \le \int_0^T (r(t) + c\|\dot{x}(t) + y(t)\|)dt \le \int_0^T (r(t) + c\|\dot{x}_0(t)\|)dt + 2c\varepsilon,$$

т.е. $S(x,y) \le M$ при $x(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$, $\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{W_1^1} < \varepsilon$, $x(0) = x_0(0)$ и $y(\cdot) \in L_1([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_1} < \varepsilon$, где $M = \int_0^T (r(t) + c\|\dot{x}_0(t)\|)dt + 2c\varepsilon$. Так как функция $\varphi(x_0,\cdot)$ непрерывна в точке $x_0(T)$, то существуют такие $\alpha_1 > 0$ и M_1, что $\varphi(x_0,b) \le M_1$ при $\|b - x_0(T)\| < \alpha_1$. Обозначим $\alpha = \min\{\alpha_1, \varepsilon\}$. По лемме 2.2 для $\alpha > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и решение x_y задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t)) - y(t)$, $x(0) = x_0$ при $y(\cdot) \in L_1([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_1} \le \delta$, что удовлетворяется неравенство $\|x_y(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{W_1^1} < \alpha$. Поэтому

$$h(y) = \inf_x \Phi(x,y) \le \Phi(x_y,y) \le M + M_1$$

при $y(\cdot) \in L_1([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_1} < \delta$. Согласно предложению 1.2.5 [4, с.21], отсюда следует, что функционал h непрерывен в нуле. Тогда из предложения 1.5.2 [4, с.31] вытекает, что функ-ционал h субдифференцируем в нуле. Лемма доказана.

Пусть $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W_1^1([0,T],X)\times L_1([0,T],X)$. Отметим, что если $f : [0,T]\times X\times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ и число $c > 0$ такие, что $f(t, x_0(t) + z, \upsilon) \le r(t) + c\|\upsilon\|$ при $z \in X$, $\|z\| \le \varepsilon$, $\upsilon \in X$, $t \in [0,T]$ и функция $f(t, x_0(t), y_0(t))$ сумми-руема, то функцинал $\int_0^T f(t,x(t),y(t))dt$ непрерывен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot))$ относительно нормированной топологии пространства $W_1^1([0,T],X)\times L_1([0,T],X)$. В част-ности, если $y_0(t) = \dot{x}_0(t)$, то функцинал $\int_0^T f(t,x(t),y(t))dt$ непрерывен в точке $(x_0(\cdot), \dot{x}_0(\cdot))$ относительно нормированной топологии пространства $W_1^1([0,T],X)\times L_1([0,T],X)$.

Положив $f_1(t,x,y) = f(t,x,y) + \delta_{Q(t)}(x) + \omega(t,x,y)$, $\varphi_1(x(0),x(T)) = \varphi(x(0),x(T)) + \delta_M(x(0))$ имеем, что задача (2.1), (2.2) эквивалентна задачу минимизации функционала

$$J(x) = \varphi_1(x(0),x(T)) + \int_0^T f_1(t,x(t),\dot{x}(t))dt \overset{x\in W_1^1([0,T],X)}{\to} \min.$$

Пусть $w \in X$, $\upsilon \in X^*$. Положим $f_1^0(t,z,\upsilon) = \inf_{w\in X}\{\langle \upsilon, w\rangle + f_1(t,z,w)\}$. Из условия следует, что $z \to f_1^0(t,z,\upsilon)$ выпуклая функция. Для простоты далее положим $\partial f_1^0(t,z,\upsilon) = \partial_z f_1^0(t,z,\upsilon)$. Решение задачи (2.1), (2.2) обозначим через $\bar{x}(t)$, т.е. $|J(\bar{x})| < +\infty$ и $J(\bar{x}) \le J(x)$ при $x(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$.

Аналогично теореме 5.1[5] доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1. Для того, чтобы функция $\overline{x}(t)$ среди всех функций $x(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$ минимизировала функционал (2.3) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot) \in frm([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot) \in L_\infty([0,T],X^*)$ и векторы $\bar{a},\ \bar{b} \in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t) \in \partial f_1^0(t,\overline{x}(t),\psi(t)+\bar{b})$ 2) $f_1^0(t,\overline{x}(t),\psi(t)+\bar{b}) = \left\langle \psi(t)+\bar{b},\dot{\overline{x}}(t)\right\rangle + f_1(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))$

3) $(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b}) \in \partial\varphi_1(\overline{x}(0),\overline{x}(T))$ 4) $\int_0^T \langle x(t),q(dt)\rangle = \langle \bar{a},x(0)\rangle + \int_0^T \langle \psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt, \quad x \in W_1^1([0,T],X)$,

5) $\sup_{y\in Q}\int_0^T \langle y(t),q_s(dt)\rangle = \int_0^T \langle \overline{x}(t),q_s(dt)\rangle$,

где $Q = \{y \in W_1^1([0,T],X) : J_1(y) = \int_0^T f_1^0(t,y(t),\psi(t)+\bar{b})dt < +\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если выполнено условие леммы 2.3 , функция $t \to \|a(t,x_0(t))\|$ суммируема и $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$, то соотношения 1)-5) и являются необходимыми.

Отметим, что если $\upsilon(\cdot) \in L_\infty([0,T],X^*)$, то из предложения 2.5 [12, с.28] следует, что $y \to f_1^0(t,y,\upsilon(t))$ выпуклый интегрант и аналогична теорему 8.1.4 или предложению 8.1.10 [13, с.348, с.345] проверяется, что $(t,y) \to f_1^0(t,y,\upsilon(t))$ $L\times B-$ измерима. По условию существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x-x_0(t)\| \le \varepsilon$ и функция $t \to \|a(t,x_0(t))\|$ суммируема. Поэтому $\|a(t,x_0(t)+z)\| \le \|a(t,x_0(t))\| + k(t)\varepsilon$ при $\|z\| \le \varepsilon$. Тогда

$$f_1^0(t,x_0(t)+z,\upsilon(t)) = \inf_{y\in X}\{\langle \upsilon(t),y\rangle + f_1(t,x_0(t)+z,y)\} =$$

$$= \inf_{y\in X}\{\langle \upsilon(t),y\rangle + f(t,x_0(t)+z,y) + \delta_{Q(t)}(x_0(t)+z) + \omega(t,x_0(t)+z,y)\} \le$$

$$\le \inf_{y\in a(t,x_0(t)+z)}\{\|\upsilon(t)\|\|y\| + r(t) + c\|y\|\} \le r(t) + (\|\upsilon(t)\| + c)(\|a(t,x_0(t))\| + k(t)\varepsilon)$$

при $\|z\| \le \varepsilon$.

Частный случай. Пусть X сепарабельное банахово пространство, $f:[0,T]\times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $a:[0,T]\times X \to 2^X$, отображение $t \to gra_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто и выпукло почти для всех $t\in[0,T]$ и $a(t,x)$ компактны при всех $t\in[0,T],\ x\in X$.

Решение задачи

$$\dot{x}(t) \in a(t,x(t)), \quad x(0) \in M \subset X \tag{2.4}$$

минимизирующее функционал

$$J(x) = \varphi(x(T)) + \int_0^T f(t,x(t))dt \tag{2.5}$$

среди всех решений задачи (2.4) назовем оптимальным. Требуется найти необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (2.4),(2.5). Поставленная задача экви-валентна следующей

$$\Phi_0(x) = \int_0^T f(t,x(t))dt + \varphi(x(T)) + \int_0^T \omega(t,x(t),\dot{x}(t))dt + \delta_M(x(0)) \overset{x\in W_1^1([0,T],X)}{\to} \min, \tag{2.6}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x,y)=\int_0^T f(t,x(t))dt+\varphi(x(T))+\int_0^T \omega(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt+\delta_M(x(0)),$$

где $y(t)\in L_1([0,T],X)$. Положим $h(y)=\inf\limits_{x\in W_1^1([t_0,t_1],X)}\Phi(x,y)$. Из предложения 2.5 [12, с. 28] вытекает, что h выпуклая функция.

Лемма 2.4. Если $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображения $t\to a(t,x)$ измеримо , существуют $\varepsilon>0$ и при некотором $x_0\in M$ решение $x_0(t)$ задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$, такие, что $\{x:\|x_0(t)-x\|\le\varepsilon\}\subset \operatorname{dom} a_t$ и $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t\in[0,T]$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, существует такая суммируемая функция $k(t)$, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, функционал $J_f(x)=\int_0^T f(t,x(t))dt: W_1^1([0,T],X)\to R_{+\infty}$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)$, $\varphi: X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция и непрерывна в точке $x_0(T)$, $\inf\limits_{x\in W_1^1([0,T],X)}\Phi_0(x)$ конечна, то функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (2.6) стабильна.

Доказательство. Из непрерывности функционала $J_f(x)$ в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $W_1^1([t_0,t_1],X)$ получим, что существуют $\alpha_1>0$ и M_1 такие, что $J_f(x)\le M_1$ при $\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_1^1}<\alpha_1$. Аналогично, по непрерывности функций в точке $x_0(T)$, существуют числа $\alpha_2>0$ и M_2 такие, что $\varphi(b)\le M_2$ при $|b-x_0(T)|<\alpha_2$. Обозначим $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon\}$. По лемме 2.2 для $\alpha>0$ существуют такие $\delta>0$ и решение x_y задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))-y(t)$, $x(0)=x_0$ при $y(\cdot)\in L_1([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_1}\le\delta$, что удовлетворяется неравенство $\|x_y(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_1^1}<\alpha$. Имеем, что

$$h(y)=\inf_x \Phi(x,y)\le\Phi(x_y,y)\le M_1+M_2$$

при $y(\cdot)\in L_1([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_1}<\delta$. Согласно предложению 1.2.5 [4, с.23], отсюда следует, что функционал h непрерывен в нуле. Тогда из предложения 1.5.2 [4, с.31] следует, что функционал h субдифференцируем в нуле. Лемма доказана.

Отметим, что в лемме 2.4 условию непрерывности функционала $J_f(x(\cdot))=\int_0^T f(t,x(t))dt: W_1^1([0,T],X)\to R_{+\infty}$ в точке $x_0(\cdot)$, можно заменить условием- существует $r(\cdot)\in L_1[0,T]$ такая, что $\sup\{f(t,x_0(t)+z): z\in X,\ \|z\|\le\varepsilon\}\le r(t)$ при $t\in[0,T]$.

Положим $\omega^0(t,x,y^*)=\min\{\langle y^*,z\rangle: z\in a(t,x)\}$, где $y^*\in X^*$.

Отметим, что $\partial\delta_M(\bar{x}(0))=N_M(\bar{x}(0))$, где $N_M(\bar{x}(0))$-нормальный конус к M в точке $\bar{x}(0)$. Кроме того $p\in N_M(\bar{x}(0))$ в том и только в том случае, когда $\max\{\langle p,\ x\rangle: x\in M\}=\langle p,\bar{x}(0)\rangle$.

Теорема 2.2. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi: X\to R_{+\infty}$ функция, M непустое множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы функ-ция $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (2.4) минимизировала функционал (2.5) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in \operatorname{frm}([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_\infty([0,T],X^*)$ и векторы $a,b\in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t)\in\partial(f(t,\bar{x}(t))+\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b))$,
2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b)=\langle\psi(t)+b,\dot{\bar{x}}(t)\rangle$,
3) $b\in\partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-a-b\in\partial\delta_M(\bar{x}(0))$,
5) $\int_0^T\langle x(t),q(dt)\rangle=\langle a,x(0)\rangle+\int_0^T\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt$ при $x\in W_1^1([0,T],X)$,

6) $\sup\limits_{y\in Q}\int\limits_0^T\langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int\limits_0^T\langle \bar{x}(t), q_s(dt)\rangle$,

где $Q = \{y \in W_1^1([0,T],X) : J_1(y) = \int\limits_0^T f(t,y(t))dt + \int\limits_0^T \omega^0(t,y(t),\psi(t)+b)dt < +\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf\limits_{x\in W_1^1([0,T],X)} \Phi_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображение $t \to a(t,x)$ измеримо , существуют $\varepsilon > 0$ и при некотором $x_0 \in M$ решение $x_0(t)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t))$, $x(0) = x_0$, такие, что $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset \operatorname{dom} a_t$, $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t \in [0,T]$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, существует такая суммируемая функция $k(t)$, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x - x'\|$ при $\|x' - x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, функция $t \to \|a(t,x_0(t))\|$ суммируема, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ такая, что $\sup\limits_{\|z\|\le\varepsilon} f(t,x_0(t)+z) \le r(t)$ при $t \in [0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Доказательство. Достаточность теоремы 2.2 непосредственно проверяется.

Необходимость. Из леммы 2.4 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [4, с.60, с.62] вытекает, что все решения $\bar{x}(\cdot)$ задачи $\inf\{\Phi_0(x) : x \in W_1^1([0,T],X\}$ и все решения $(-\bar{z}(\cdot))$ задачи $\sup\limits_{z\in L_\infty([0,T],X^*)} \{-\Phi^*(0,z)\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{x},0) + \Phi^*(0,-\bar{z}) = 0 \tag{2.7}$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_0^T f(t,\bar{x}(t))dt + \varphi(\bar{x}(T)) + \int\limits_0^T \omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt + \delta_M(\bar{x}(0)) + \Phi^*(0,-\bar{z}) = 0.$$

По определению

$$\Phi^*(0,-\bar{z}) = \sup_{\substack{x\in W_1^1([0,T],X)\\ y\in L_1^1([0,T],X)}} \left\{-\int\limits_0^T\langle \bar{z}(t), y(t)\rangle dt - \int\limits_0^T f(t,x(t))dt - \varphi(x(T)) - \int\limits_0^T \omega(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt - \delta_M(x(0))\right\} =$$

$$= \sup_{\substack{x\in W_1^1([0,T],X)\\ y\in L_1^1([0,T],X)}} \left\{-\int\limits_0^T\langle \bar{z}(t), \dot{x}(t)+y(t)\rangle dt + \int\limits_0^T\langle \bar{z}(t), \dot{x}(t)\rangle dt - \int\limits_0^T f(t,x(t))dt - \varphi(x(T)) - \int\limits_0^T \omega(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt - \delta_M(x(0)\right\} =$$

$$= \sup_{x\in W_1^1([0,T],X)} \left\{\int\limits_0^T\langle \bar{z}(t), \dot{x}(t)\rangle dt - \int\limits_0^T f(t,x(t))dt - \varphi(x(T)) - \int\limits_0^T \omega^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt - \delta_M(x(0))\right\}.$$

Обозначим $J_1(x) = \int\limits_0^T f(t,x(t))dt + \int\limits_0^T \omega^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt$, $J_2(x) = \varphi(x(T)) + \delta_M(x(0))$. Из (2.7) следует, что J_1 и J_2 собственные функционалы. По условию $J_2(x_0(\cdot))$ конечен. Поэтому в частности отсюда получим, что $J_1(x_0(\cdot)) = \int\limits_0^T f(t,x_0(t))dt + \int\limits_0^T \omega^0(t,x_0(t),\bar{z}(t))dt > -\infty$.

Из предложения 2.5 [12, с.28] следует, что $x \to f(t,x) + \omega^0(t,x,\bar{z}(t))$ выпуклый интегрант и аналогична теорему 8.1.4 или предложению 8.1.10 [13, с.348, с.345] проверяется, что $(t,y) \to f(t,y) + \omega^0(t,y,\bar{z}(t))$ $L\times B-$ измерима. По условию существует суммируемая функция $k(t)$ такая,

что $\rho_x(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x-x_0(t)\| \le \varepsilon$ и функция $t \to \|a(t,x_0(t))\|$ суммируема. Поэтому $\|a(t,x_0(t)+z)\| \le \|a(t,x_0(t))\| + k(t)\varepsilon$ при $\|z\| \le \varepsilon$. Так как

$$f(t,x_0(t)+z)+\omega^0(t,x_0(t)+z,\bar{z}(t)) = f(t,x_0(t)+z)+\inf_{y\in a(t,x_0(t)+z)}\langle \bar{z}(t),y\rangle \le r(t)+\|\bar{z}(t)\|(\|a(t,x_0(t))\|+k(t)\varepsilon)$$

при $\|z\| \le \varepsilon$, то при условии теоремы 2. 2 имеем, что $J_1(x(\cdot))$ непрерывна в точке $x_0(\cdot)$.

Положив $\bar{z}^* = (0,\bar{z}(\cdot)) \in W_1^1([0,T],X)^*$,

$$S(x) = \int_0^T f(t,x(t))dt + \varphi(x(T)) + \int_0^T \omega^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt + \delta_M(x(0)$$

имеем, что $\Phi^*(0,-\bar{z}) = S^*(\bar{z}^*)$. Используя неравенство Юнга-Фенхелья получим

$$S^*(\bar{z}^*) \ge \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x}), \qquad S(\bar{x}) \le \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt + \Phi_0(\bar{x}),$$

то отсюда получим, что $S^*(\bar{z}^*) \ge \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x}) \ge -\Phi_0(\bar{x}).$ Поэтому из соотношения (2.7) следует, что

$$S^*(\bar{z}^*) = \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x}), \quad S(\bar{x}) = \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt + \Phi_0(\bar{x}).$$

Из второго соотношения имеем

$$\int_0^T \omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t))dt - \int_0^T \omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt = \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt.$$

Отсюда следует, что

$$\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t)) - \omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle$$

при $t \in [0,T]$. Поэтому $\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t)) = \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle$ при $t \in [0,T]$. Из равенства $S^*(\bar{z}^*) = \int_0^T \langle \bar{z}(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - S(\bar{x})$ вытекает, что $\bar{z}^* \in \partial S(\bar{x})$. Из теоремы 0.3.3[13, с.59] имеем, что $\partial S(\bar{x}) = \partial J_1(\bar{x}) + \partial J_2(\bar{x})$. Тогда найдутся точки $\bar{z}_i^* \in W_1^1([0,T],X)^*$, $i = 1,2;$ такие, что $\bar{z}^* = \bar{z}_1^* + \bar{z}_2^*$, $\bar{z}_1^* = (a,\psi(\cdot))$, $\bar{z}_2^* = (d,b)$ и $\bar{z}_1^* \in \partial J_1(\bar{x})$, $\bar{z}_2^* \in \partial J_2(\bar{x})$. Так как $\bar{z}_1^* \in \partial_W J_1(\bar{x})$, то $J_1'(\bar{x};y)$ собственный функционал в $C_1^1([0,T],X)$. Используя следствию 2.5 [5] имеем, что $cl_C J_1'(\bar{x};y) = cl_W J_1'(\bar{x};y)$. Тогда из следствия 3.3 [5] вытекает, что $\partial_W J_1(\bar{x}) = \partial_C J_1(\bar{x})$. Поэтому существует функционал $\bar{z}_q^* \in C_1^1([0,T],X)^*$ такой, что $\bar{z}_1^* = \bar{z}_q^*$, и $\bar{z}_q^* \in \partial_C J_1(\bar{x})$. По следствию 3.1[5] $\bar{z}_q^* \in \partial_C J_1(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда $\dot{q}(t) \in \partial(f(t,\bar{x}(t)) + \omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t)))$ и $\sup_{y\in Q}\int_0^T \langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int_0^T \langle \bar{x}(t), q_s(dt)\rangle,$ где $q_s(\cdot)$ сингулярная часть меры $q(\cdot)$. Ясно, что

$$(0,\bar{z}(\cdot)) = (a,\psi(\cdot)) + (d,b) \text{ и } \langle a,x(0)\rangle + \int_0^T \langle \psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt = \int_0^T \langle x(t), q(dt)\rangle$$

для любого $x \in W_1^1([0,T],X)$. Поэтому $\bar{z}(t) = \psi(t) + b, \quad a + d = 0.$

Так как $\bar{z}_2^* \in \partial J_2(\bar{x})$, то из теоремы 4.1 [5] следует, что $\bar{z}_2^* = (d,b)$, где $b \in X^*$ и $(d-b,b) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$, где $d = -a$. Теорема доказана.

Если функционал $(t,x)\to f(t,x)+\omega^0(t,x,\bar z(t))$ выпуклый нормальный интегрант , то из леммы 3.4 следует , что $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$.

Пусть выполняется условия теоремы 2.2 , $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t\in[0,T]$, $x\in X$ и существует функция $\lambda(\cdot)\in L_1[0,T]$ такая, что $\|a(t,x)\|\le\lambda(t)(1+\|x\|)$ при $t\in[0,T]$, $x\in X$. Тогда $\omega^0(t,x,\bar z(t))=\inf\limits_{y\in a(t,x)}\langle\bar z(t),y\rangle\le\|\bar z(t)\|\lambda(t)(1+\|x\|)$ $t\in[0,T]$, $x\in X$. Поэтому $x\to\omega^0(t,x,\bar z(t))$ непрерывная функция. Отсюда следует, что $(t,y)\to f(t,y)+\omega^0(t,y,\bar z(t))$ выпуклый нормальный интегрант.

Если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие теоремы 2.2, то из теоремы 3.2[5] следует, что $q(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера. Тогда имеем

$$\int_0^T\langle x(t),\,q(dt)\rangle=\int_0^T x(t)d(q(t)-q(T))=\langle q(T)-q(0),x(0)\rangle+\int_0^T\langle q(T)-q(t),\dot x(t)\rangle dt$$

при $x\in W_1^1([0,T],X)$. Так как $\int\limits_0^T\langle x(t),\,q(dt)\rangle=\langle a,x(0)\rangle+\int\limits_0^T\langle\psi(t),\dot x(t)\rangle dt$ при $x\in W_1^1([0,T],X)$, то отсюда получим, что $a=q(T)-q(0)$ и $\psi(t)=q(T)-q(t)$. Поэтому $\dot q(t)=-\dot\psi(t)$ и $\psi(0)=a,\ \psi(T)=0$. Обозначив $\bar y^*(t)=\psi(t)+b$ из доказательства теоремы 2.2 имеем, что $a+b=\bar y^*(0),\ b=\bar y^*(T)$.

Поэтому используя из теоремы 3.1[5] или теоремы 3.2[5] в доказательстве теоремы 2.2 имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 2.1. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы траектория $\bar x(t)$ среди всех решений задачи (2.4) минимизировала функционал (2.5) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar y^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такие, что

1) $-\dot{\bar y}^*(t)\in\partial(f(t,\bar x(t))+\omega^0(t,\bar x(t),\bar y^*(t)))$, 2) $\omega^0(t,\bar x(t),\bar y^*(t))=\langle\bar y^*(t),\dot{\bar x}(t)\rangle$,

3) $\bar y^*(T)\in\partial\varphi(\bar x(T))$, 4) $\min\{\langle\bar y^*(0),\ x(0)\rangle:x(0)\in M\}=\langle\bar y^*(0),\bar x(0)\rangle$,

а если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие теоремы 2.2, то соотношения 1)-4) являются также необходимыми.

Из следствие 2.1 следует, что верно следующее следствие 2.2.

Следствие 2.2. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы траектория $\bar x(t)$ среди всех решений задачи (2.4) минимизировала функционал (2.5) достаточно, чтобы нашлись функция $\bar y^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{\bar y}^*(t),\bar y^*(t))\in\partial(f(t,\bar x(t))+\omega(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)))$, 2) $-\bar y^*(T)\in\partial\varphi(\bar x(T))$,

3) $\max\{\langle\bar y^*(0),\ x(0)\rangle:x(0)\in M\}=\langle\bar y^*(0),\bar x(0)\rangle$,

а если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие теоремы 2.2, то соотношения 1)-3) являются также необходимыми.

Если функционал $I_1(\bar x(\cdot))=\int\limits_0^T f(t,\bar x(t))dt$ $(I_2(\bar x(\cdot))=\int\limits_0^T\omega^0(t,\bar x(t),\bar z(t))dt)$ непрерывен в точке $\bar x(\cdot)$, то из теоремы 2.1[5] (или из теоремы 2.2[5]) следует, что функционал $x_1^*=(a_1,\psi_1)\in W_1^1([0,T],X)^*$ $(x_2^*=(a_2,\psi_2)\in W_1^1([0,T],X)^*)$ принадлежит $\partial_W I_1(\bar x)$ $(\partial_W I_2(\bar x))$ тогда и только тогда, когда функционал x_1^* (x_2^*) "абсолютно непрерывен" и $-\dot\psi_1(t)\in\partial f(t,\bar x(t))$ $(-\dot\psi_2(t)\in\partial\omega^0(t,\bar x(t),\bar z(t)))$. Поэтому из теоремы 0.3.3[13, с.59] и из следствия 2.1 следует, что верно следующее следствие.

Следствие 2.3. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы траектория $\bar x(t)$ среди всех

решений задачи (2.4) минимизировала функционал (2.5) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar{x}^*(\cdot),\ \bar{y}^*(\cdot) \in W_1^1([0,T],X^*)$ такие, что

1) $\dot{\bar{x}}^*(t) \in \partial\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{y}^*(t))$, 2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{y}^*(t)) = \langle \bar{y}^*(t), \dot{\bar{x}}(t) \rangle$,

3) $-\dot{\bar{y}}^*(t) - \dot{\bar{x}}^*(t) \in \partial f(t, \bar{x}(t))$, 4) $\bar{y}^*(T) \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$,

5) $\min\{\langle \bar{y}^*(0),\ x(0) \rangle : x(0) \in M\} = \langle \bar{y}^*(0), \bar{x}(0) \rangle$,

а если при $x_0(t) = \bar{x}(t)$ удовлетворяется условие теоремы 2.2, то соотношения 1)-5) являются также необходимыми.

Замечание 2.3. Пусть $B(x_0(t),\varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0(t)\| \le \varepsilon\}$ и $a : [0,T] \times B(x_0(t),\varepsilon) \to comp(X)$, где через $comp(X)$ обозначено множество всех непустых компактных подмножеств пространства X. Если отображение $t \to a(t,x)$ измеримо на $[0,T]$ и отображение $x \to a(t,x)$ непрерывно в $B(x_0(t),\varepsilon)$ относительно метрики Хаусдорфа, то используя теорему Скорца-Драгони[9] и из теоремы 1.3.11[9, с.47] имеем, что $gr\,a_t = \bigcup\limits_{x \in x_0(t)+\varepsilon B} (x, a(t,x))$ измеримо на $[0,T]$. Если $x \to a(t,x)$ полунепрерывно сверху в $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, то из теорем 1.2.29 и 1.3.11[9, с.32,47] имеем, что $gr\,a_t = \bigcup\limits_{x \in x_0(t)+\varepsilon B} (x, a(t,x))$ замкнуто. Поэтому в следствие 2.1 условие $t \to gr\,a_t$ измеримо на $[0,T]$ и множество gra_t замкнуто почти для всех $t \in [0,T]$, можно заменить условием отображение $t \to a(t,x)$ измеримо на $[0,T]$ и $x \to a(t,x)$ полунепрерывно сверху в $\{x \in X : \|x - x_0(t)\| \le \varepsilon\}$.

Пусть $Q : [0,T] \to 2^X$ нормальное многозначное отображение, т.е. измеримое и замк-нутозначное отображение, и $Q(t)$ выпуклое множество при $t \in [0,T]$. Отметим, что если $Q : [0,T] \to 2^X$ нормальное многозначное отображение, то $\delta_Q(t,x) = \delta_{Q(t)}(x) = \begin{cases} 0: & \text{если } x \in Q(t), \\ +\infty : & \text{если } x \notin Q(t) \end{cases}$ нормальный интегрант (см. [13, с.347]).

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(x) = \varphi(x(T)) + \int_0^T f(t, x(t))dt \tag{2.8}$$

среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in M \subset X \tag{2.9}$$

$$x(t) \in Q(t) \tag{2.10}$$

Положив $\bar{f}(t,x) = f(t,x) + \delta_{Q(t)}(x)$ имеем, что задача (2.8)-(2.10) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J(x) = \varphi(x(T)) + \int_0^T \bar{f}(t, x(t))dt$$

среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in M \subset X.$$

Поэтому из теоремы 2.2 имеем,что верно следующее следствие.

Следствие 2.4. Пусть $f : [0,T] \times X \to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi : X \to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T] \times (X \times X)$, $Q : [0,T] \to 2^X$ нормальное многозначное отображение. Для того, чтобы функция $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (2.9), (2.10) минимизировала

функционал (2.8) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot) \in \mathrm{frm}([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot) \in L_\infty([0,T],X^*)$ и векторы $a, b \in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t) \in \partial(f(t,\bar{x}(t)) + \delta_{Q(t)}(\bar{x}(t)) + \omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b))$,
2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b) = \langle \psi(t)+b, \dot{\bar{x}}(t)\rangle$,
3) $b \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-a-b \in \partial\delta_M(\bar{x}(0))$,
5) $\int_0^T \langle x(t), q(dt)\rangle = \langle a, x(0)\rangle + \int_0^T \langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt$ при $x(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$,
6) $\sup_{y\in G} \int_0^T \langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int_0^T \langle \bar{x}(t), q_s(dt)\rangle$,

$$G = \{y \in W_1^1([0,T],X) : J_1(y) = \int_0^T (f(t,y(t)) + \delta_{Q(t)}(y(t)))dt + \int_0^T \omega^0(t,y(t),\psi(t)+b)dt < +\infty\},$$

где q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf_{x\in W_1^1([0,T],X)} \Phi_0(x)$ конечен, $f : [0,T]\times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi : X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $Q : [0,T] \to 2^X$ нормальное многозначное отображение и $Q(t)$ выпуклое множество при $t \in [0,T]$, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображение $t \to a(t,x)$ измеримо, существуют решение $x_0(t)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t))$, $x(0) = x_0$, где $x_0 \in M$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset \mathrm{dom}\, a_t$, $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset Q(t)$ и $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t \in [0,T]$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$ и существует такая суммируемая функция $k(t)$, что

$$\rho_x(a(t,x), a(t,x')) \le k(t)\|x - x'\|$$

при $\|x' - x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, функция $t \to \|a(t,x_0(t))\|$ суммируема, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ такая, что функция $\sup\{f(t,x_0(t)+z) : z \in X, \|z\| \le \varepsilon\} \le r(t)$ при $t \in [0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\mathrm{int}_C \,\mathrm{dom}\, J_1 = \mathrm{int}_W \,\mathrm{dom} J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Отметим, что если $f : [0,T]\times X \to R$, $\mathrm{dom}\, a_t = X$, существуют суммируемые функции $\lambda(t)$ и $\lambda_1(t)$ такие, что $\|a(t,x)\| \le \lambda(t)(1+\|x\|)$ и $|f(t,x)| \le \lambda_1(t)(1+\|x\|)$ при $x \in X$, то $G = \{y(\cdot) \in W_1^1([0,T],X) : y(t) \in Q(t)\}$.

Замечание 2.4. При условие следствия 2.4, абсолютно непрерывность меры $q(\cdot) \in \mathrm{frm}([0,T],X^*)$ эквивалентно существованию решений задачи

1) $-\dot{\psi}(t) \in \partial(f(t,\bar{x}(t)) + \delta_{Q(t)}(\bar{x}(t)) + \omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b))$,
2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b) = \langle \psi(t)+b, \dot{\bar{x}}(t)\rangle$,
3) $b \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-\psi(0)-b \in \partial\delta_M(\bar{x}(0))$, где $\psi(T) = 0$.

Пример 2.1. Пусть Y банахово пространство, $Q : [0,T] \to \mathrm{conv}(X)$ и $U : [0,T] \to \mathrm{conv}(Y)$ измеримые многозначные отображения, $F : [0,T]\times Y \to X$, где $\mathrm{conv}(V)$ совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств банахово пространства V, $A(t) : X \to X$ линейный оператор.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(x) = \varphi(x(T)) + \int_0^T f(t,x(t))dt \tag{2.11}$$

среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t,u(t)), \quad x(0) \in M \subset X, \tag{2.12}$$

$$x(t) \in Q(t), \ u(t) \in U(t) \tag{2.13}$$

Положив $a(t,x) = A(t)x + F(t,U(t))$, получим, что задача (2.11)- (2.13) является частным случаем задачи (2.8)-(2.10). Поэтому из теоремы 2.2 можно получить необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (2.11)- (2.13) (см. также [2]).

Обозначив $a(t,x)=A(t)x+F(t,U(t))$, рассмотрим минимизации функционала (2.11) среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M\subset X,\ x(t)\in Q(t).$$

Положив $\omega(t,x,z)=\begin{cases}0, & z\in a(t,x),\\ +\infty, & z\notin a(t,x),\end{cases}$ имеем, что поставленная задача эквивалентна следующей задаче

$$J_0(x)=\delta_M(x(0))+\varphi(x(T))+\int_0^T(f(t,x(t))+\delta_{Q(t)}(x(t))+\omega(t,x(t),\dot{x}(t)))dt\to\inf. \qquad (2.14)$$

Лемма 2.5. Если $U:[0,T]\to conv(Y)$ многозначное отображение, отображения $t\to U(t)$, $t\to A(t)$ и $t\to F(t,y)$ измеримы на $[0,T]$, отображение $y\to F(t,y)$ непрерывно, то $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$.

Доказательство. Из теоремы 1.5.13 [9, с.71] вытекает, что $t\to F(t,U(t))$ измеримы на $[0,T]$. Так как $a(t,x)=A(t)x+F(t,U(t))$, то $gra_t=\{(x,y)\in X\times X: y\in A(t)x+F(t,U(t))\}$. Покажем, что gra_t замкнутое множество. Пусть $(x_n,z_n)\in gra_t$ и $(x_n,z_n)\to(x,z)$. Ясно, что $z_n=A(t)x_n+\upsilon_n$, где $\upsilon_n\in F(t,U(t))$. Поэтому $\upsilon_n=z_n-A(t)x_n\to z-A(t)x$ при $n\to+\infty$. Из теоремы 1.2.35[9, с.34] вытекает, что множество $F(t,U(t))$ компактно. Так как $F(t,U(t))$ компактное множество, то имеем, что $z-A(t)x=\upsilon\in F(t,U(t))$, т.е. $z=A(t)x+\upsilon$. Отсюда вытекает, что $(x,z)\in gra_t$, т.е. gra_t замкнутое множество.

Ясно, что $gra_t=\bigcup_{x\in X}(x,A(t)x+F(t,U(t)))=cl\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,A(t)x_i+F(t,U(t)))$, где $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ счетное плотное в X множество. Так как $(x_i,A(t)x_i+F(t,U(t))$ измеримое многозначное отображение, то аналогично предложению 8.1.2[13, с.339]) имеем, что $\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,A(t)x_i+F(t,U(t)))$ измеримо. Тогда получим, что $t\to gra_t$ измеримо. Поэтому $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Лемма доказана.

Если множество $F(t,U(t))$ выпукло, то легко проверяется, что $x\to a(t,x)$ выпуклое отображение, т.е. gra_t -выпуклое множество.

Следствие 2.5. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение. Для того, чтобы функция $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (2.12), (2.13) минимизировала функционал (2.11) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in frm([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_\infty([0,T],X^*)$ $a,b\in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t)\in\partial(f(t,\bar{x}(t))+\delta_{Q(t)}(\bar{x}(t))+\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b))$,
2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b)=\langle\psi(t)+b,\dot{\bar{x}}(t)\rangle$,
3) $b\in\partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-a-b\in\partial\delta_M(\bar{x}(0))$,
5) $\int_0^T\langle x(t),q(dt)\rangle=\langle a,x(0)\rangle+\int_0^T\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt$ при $x\in W_1^1([0,T],X)$,
6) $\sup_{y\in G}\int_0^T\langle y(t),q_s(dt)\rangle=\int_0^T\langle\bar{x}(t),q_s(dt)\rangle$,

где $G=\{y\in W_1^1([0,T],X): J_1(y)=\int_0^T(f(t,y(t))+\delta_{Q(t)}(y(t)))dt+\int_0^T\omega^0(t,y(t),\psi(t)+b)dt<+\infty\}$, q_s -сингулярная часть функции q, а если $\inf J_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q(t)$ непустое выпуклое множество при $t\in[0,T]$, $U:[0,T]\to conv(Y)$ многозначное отображение, отображения $t\to U(t)$, $t\to A(t)$ и $t\to F(t,y)$ измеримы на $[0,T]$, отображение $y\to F(t,y)$ непрерывно, $F(t,U(t))$ выпуклое множество, функции $t\to\|F(t,U(t))\|$ и $t\to\|A(t)\|$ суммируемы в $[0,T]$, существуют

решение $x_0(t)$ задачи (12),(13) и $\varepsilon > 0$ такие, что $\{x : |x_0(t) - x| \le \varepsilon\} \subset Q(t)$, функция $r(t) = \sup\{f(t, x_0(t) + x) : x \in X, \|x\| \le \varepsilon\}$ суммируема в $[0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\operatorname{int}_C \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_W \operatorname{dom} J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Доказательство. Из теорем 1.2.35 , 1.3.11 и 1.5.18[9, с.34, 47, 77] следуют, что $a(t,x)$ компактное множество, отображения $t \to a(t,x)$ измеримы, $x \to a(t,x)$ выпуклые и полунепрерывные сверху отображения.

Положив $\bar{f}(t,x,y) = f(t,x) + \delta_{Q(t)}(x) + \omega(t,x,y)$, имеем, что

$$\bar{f}^0(t,x,\upsilon) = \inf_{z \in X}\{\langle \upsilon, z\rangle + f(t,x) + \delta_{Q(t)}(x) + \omega(t,x,z)\} = f(t,x) + \delta_{Q(t)}(x) +$$

$$+ \inf_{z \in X}\{\langle \upsilon, z\rangle + \omega(t,x,z)\} = f(t,x) + \delta_{Q(t)}(x) + \omega^0(t,x,\upsilon).$$

Поэтому применяя теорему 2.2 имеем справедливость следствия 2.5. Следствие доказано.
По определению

$$\omega^0(t,x,\upsilon) = \inf_{z \in X}\{\langle \upsilon, z\rangle + \omega(t,x,z)\} = \inf\{\langle \upsilon, z\rangle : z \in A(t)x + F(t,U(t))\} =$$
$$= \langle \upsilon, A(t)x\rangle + \inf\{\langle \upsilon, z\rangle : z \in F(t,U(t))\}.$$

Поэтому из соотношения 1) следствия 2.5 вытекает, что

$$\dot{q}(t) \in \partial(f(t,\bar{x}(t)) + \delta_{Q(t)}(\bar{x}(t))) + A^*(t)(\psi(t) + b).$$

Из соотношения 2) следствие 2.5 вытекает, что

$$\langle \psi(t) + b, A(t)\bar{x}(t)\rangle + \inf_{z \in X}\{\langle \psi(t) + b, z\rangle : z \in F(t,U(t))\} = \langle \psi(t) + b, \dot{\bar{x}}(t)\rangle.$$

Отсюда имеем, что

$$\inf\{\langle \psi(t) + b, z\rangle : z \in F(t,U(t))\} = \langle \psi(t) + b, \dot{\bar{x}}(t) - A(t)\bar{x}(t)\rangle.$$

Тогда по теореме 1.5.15[9, с.75] существует такая измеримая функция $\bar{u}(t) \in U(t)$ такая, что $\dot{\bar{x}}(t) - A(t)\bar{x}(t) = F(t,\bar{u}(t))$. Поэтому $\inf\{\langle \psi(t) + b, z\rangle : z \in F(t,U(t))\} = \langle \psi(t) + b, F(t,\bar{u}(t))\rangle$. Так как $\partial\delta_M(\bar{x}(0)) = N_M(\bar{x}(0))$, то из 4) имеем, что $-a - b \in N_M(\bar{x}(0))$. Таким образом доказано следующее следствие.

Следствие 2.6. Пусть $f : [0,T] \times X \to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi : X \to R_{+\infty}$, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T] \times (X \times X)$, $Q : [0,T] \to 2^X$ многозначное нормальное отображение. Для того, чтобы функция $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ среди всех решений задачи (2.12), (2.13) минимизировала функционал (2.11) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot) \in \operatorname{frm}([0,T], X^*)$, функция $\psi(\cdot) \in L_\infty([0,T], X^*)$ и векторы $a, b \in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t) \in \partial f(t,\bar{x}(t)) + N_{Q(t)}(\bar{x}(t)) + A^*(t)(\psi(t) + b)$,
2) $\inf\{\langle \psi(t) + b, y\rangle : y \in F(t,U(t))\} = \langle \psi(t) + b, F(t,\bar{u}(t))\rangle$,
3) $b \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-a - b \in N_M(\bar{x}(0))$,
5) $\int_0^T \langle x(t), q(dt)\rangle = \langle a, x(0)\rangle + \int_0^T \langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt$ при $x \in W_1^1([0,T], X)$,
6) $\sup_{y \in G} \int_0^T \langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int_0^T \langle \bar{x}(t), q_s(dt)\rangle$,

где $G = \{y \in W_1^1([0,T], X) : J_1(y) = \int_0^T (f(t,y(t)) + \delta_{Q(t)}(y(t)))dt + \int_0^T \omega^0(t, y(t), \psi(t) + b)dt < +\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf J_0(x)$ конечен, $f : [0,T] \times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi : X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T] \times (X \times X)$, $Q(t)$

непустое выпуклое множество при $t \in [0,T]$, $U:[0,T] \to \mathrm{conv}(Y)$ многозначное отображение, отображения $t \to U(t)$, $t \to A(t)$ и $t \to F(t,y)$ измеримы на $[0,T]$, отображение $y \to F(t,y)$ непрерывно, множество $F(t,U(t))$ выпукло, функции $t \to \|F(t,U(t))\|$ и $t \to \|A(t)\|$ суммируемы в $[0,T]$, существуют решение $x_0(t)$ задачи (2.12),(2.13) и $\varepsilon > 0$ такие, что $\{x : |x_0(t) - x| \le \varepsilon\} \subset Q(t)$, функция $r(t) = \sup\{f(t,x_0(t)+x) : x \in X, \|x\| \le \varepsilon\}$ суммируема в $[0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\mathrm{int}_C \,\mathrm{dom}\, J_1 = \mathrm{int}_W \,\mathrm{dom} J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Отметим, что если $f:[0,T]\times X \to R$, существуют суммируемые функции $\lambda(t)$ и $\lambda_1(t)$ такие, что $\|F(t,U(t))\| \le \lambda(t)$ и $|f(t,x)| \le \lambda_1(t)(1+\|x\|)$ при $x \in X$, то $G = \{y(\cdot) \in W_1^1([0,T],X) : y(t) \in Q(t)\}$.

Если $q(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера, то

$$\int_0^T \langle x(t), q(dt)\rangle = \int_0^T x(t)\,d(q(t)-q(T)) = \langle q(T)-q(0), x(0)\rangle + \int_0^T \langle q(T)-q(t), \dot{x}(t)\rangle dt$$

при $x \in W_1^1([0,T],X)$. Отсюда получим, что $a = q(T) - q(0)$ и $\psi(t) = q(T) - q(t)$. Поэтому $\dot{q}(t) = -\dot{\psi}(t)$ и $\psi(T) = 0$. Тогда соотношения 1)-4) следствия 2.6 эквивалентны следующим соотношениям

1) $-\dot{\psi}(t) \in \partial f(t,\bar{x}(t)) + N_{Q(t)}(\bar{x}(t)) + A^*(t)(\psi(t)+b)$,
2) $\inf\{\langle \psi(t)+b), z\rangle : z \in F(t,U(t))\} = \langle \psi(t)+b, F(t,\bar{u}(t))\rangle$,
3) $b \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-\psi(0) - b \in N_M(\bar{x}(0))$,

где $\psi(T) = 0$. Обозначив $s(t) = \psi(t) + b$ имеем, что

1) $-\dot{s}(t) \in \partial f(t,\bar{x}(t)) + N_{Q(t)}(\bar{x}(t)) + A^*(t)s(t)$,
2) $\inf\{\langle s(t), z\rangle : z \in F(t,U(t))\} = \langle s(t), F(t,\bar{u}(t))\rangle$,
3) $s(T) \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$,
4) $-s(0) \in N_M(\bar{x}(0))$.

3. Невыпуклый случай

Пусть X сепарабельное банахово пространство, $f:[0,T]\times X\times X \to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi : X\times X \to R_{+\infty}$ функция, $M \subset X$ замкнутое множество, $Q:[0,T] \to 2^X$ нормаль-ное многозначное отображение, т.е. измеримое и замкнутозначное отображение, отобра-жение $a:[0,T]\times X \to 2^X$ такое, что $t \to \mathrm{gr}\, a_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто при $t \in [0,T]$. Отсюда вытекает, что $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$.

Положим

$$\psi(t,x,z) = \inf_{u \in a(t,x)} \|u - z\|, \quad \psi_0(t,x) = \inf_{\upsilon \in Q(t)} \|\upsilon - x\|, \quad q(x) = \inf_{y \in M} \|y - x\|.$$

Рассмотрим среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t) \in a(t,x(t)), \quad x(0) \in M, \tag{3.1}$$

минимизации функционала

$$J(x) = \varphi(x(0),x(T)) + \int_0^T (f(t,x(t),\dot{x}(t)) + \psi_0(t,x(t)))dt. \tag{3.2}$$

Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (3.1), (3.2).

Лемма 3.1. Пусть $a:[0,T]\times X \to 2^X$, где $a(t,x)$ непустое замкнутое ограниченное множество при $t \in [0,T]$, $\|x - \bar{x}(t)\| \le \alpha$ и $\rho_x(a(t,x),a(t,x_1)) \le k(t)\|x - x_1\|$ при $\|x - \bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1 - \bar{x}(t)\| \le \alpha$, где $k:[0,T] \to R$. Тогда

$$|\psi(t,x,y) - \psi(t,x_1,y_1)| \le k(t)\|x - x_1\| + \|y - y_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $y, y_1 \in X$.

Лемма 3.1 доказывается аналогично лемме 3.2.2[14, с. 93].

Положим $\omega^0(t,x,y^*) = \inf\{\langle y^*, y\rangle : y \in a(t,x)\}$, где $y^* \in X^*$.

Лемма 3.2. Пусть $a:[0,T]\times X \to 2^X$, где $a(t,x)$ непустое замкнутое ограниченное множество при $t \in [0,T]$, $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$ и $\rho_x(a(t,x),a(t,x_1)) \le k(t)\|x-x_1\|$ при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, где $k:[0,T]\to R$. Тогда

$$\left|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*)\right| \le \{k(t)\max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}+\|a(t,\bar{x}(t))\|+k(t)\alpha\}(\|x-x_1\|+\|y^*-y_1^*\|)$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $y^*, y_1^* \in X^*$.

Доказательство. По условию имеем

$$\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*) = \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} \le$$
$$\le \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x)+k(t)\|x-x_1\|B\} \le$$
$$\le \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x)\} + \sup\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \le$$

$$\le \sup\{\langle y^*-y_1^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} + \sup\{\|y_1^*\|\|z\| : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \le \|y^*-y_1^*\|\|a(t,x)\| + \|y_1^*\|k(t)\|x-x_1\| \le$$
$$\le \|y^*-y_1^*\|(\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)) + \max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}k(t)\|x-x_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$.

Аналогично получим, что

$$\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*) = \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} \ge$$
$$\ge \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x_1)+k(t)\|x-x_1\|B\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} \ge$$

$$\ge \inf\{\langle y^*,y\rangle : z\in a(t,x_1)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} + \inf\{\langle y^*,z\rangle : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \ge$$

$$\ge \inf\{\langle y^*-y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} - \sup\{\|y^*\|\|z\| : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \ge -\|y^*-y_1^*\|\|a(t,x_1)\| - \|y^*\|k(t)\|x-x_1\| \ge$$

$$\ge -\|y^*-y_1^*\|(\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)) - \max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}k(t)\|x-x_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$. Поэтому

$$\left|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*)\right| \le \|y^*-y_1^*\|(\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)) + \max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}k(t)\|x-x_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$.

Отсюда следует, что

$$\left|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*)\right| \le \{\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)+k(t)\max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}\}(\|x-x_1\|+\|y^*-y_1^*\|)$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$. Лемма доказана.

Легко проверяется, что если $x \to a(t,x)$ выпуклое отображение, то $(x,z)\to\psi(t,x,z)$ выпуклая функция.

Рассмотрим задачу

$$\Phi_\nu(x)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T(f(t,x(t),\dot{x}(t))+\psi_0(t,x(t)))dt+\nu(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)\overset{x\in W_1^1([0,T],X)}{\to}\min.$$

Решение задачи (3.1), (3.2) обозначим через $\bar{x}(t)$ (ясно, что $|\Phi_\nu(\bar{x})|<+\infty$).

Лемма 3.3. Пусть $a(t,x)$ в области $t\in[0,T]$, $\|x-\bar{x}(t)\|\le\alpha$ удовлетворяет условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество и измеримо по t,

в) существует такая суммируемая функция $k(t)$, что

$$\rho_x(a(t,x),a(t,x_1))\le k(t)\|x-x_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\|\le\alpha$. Кроме того пусть M и $Q(t)$ непустые замкнутые множества, $t\to Q(t)$ измеримое отображение, отображение $t\to f(t,x,y)$ измеримо, существуют сумми-руемая функция $k_1(t)$, числа $c>0$, $k_0>0$ и $\alpha>0$ такие, что

$$|f(t,x,y)-f(t,x_1,y_1)|\le k_1(t)\|x-x_1\|+c\|y-y_1\|,\qquad |\varphi(u,z)-\varphi(u_1,z_1)|\le k_0(\|u-u_1\|+\|z-z_1\|)$$

при $\|x-\bar{x}(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\|\le\alpha$, $y,\ y_1\in X$, $\|u-\bar{x}(0)\|\le\alpha$, $\|u_1-\bar{x}(0)\|\le\alpha$, $\|z-\bar{x}(T)\|\le\alpha$, $\|z_1-\bar{x}(T)\|\le\alpha$.

Тогда $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал $\Phi_\nu(x(\cdot))$ на множестве D при $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$, где $D=\left\{x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X):\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1}<\frac{\alpha}{\beta}\right\}$, $L=\int_0^T(k_1(t)+1)dt+c+2k_0$, $\beta>e^{m(T)}(2+m(T))^2$, $m(t)=\int_0^t k(s)ds$.

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$, $x_1(\cdot)\in D$. Так как $\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)-x_1(t)\|\le\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1}$, то

$$|J(x(\cdot))-J(x_1(\cdot))|\le\int_0^T(k_1(t)+1)\|x(t)-x_1(t)\|+c\|\dot{x}(t)-\dot{x}_1(t)\|)dt+k_0(\|x(0)-x_1(0)\|+\|x(T)-x_1(T)\|)\le$$

$$\le\int_0^T(k_1(t)+1)dt\max_{t\in[0,T]}\|x(t)-x_1(t)\|+c\int_0^T\|\dot{x}(t)-\dot{x}_1(t)\|dt+k_0(\|x(0)-x_1(0)\|+\|x(T)-x_1(T)\|)\le$$

$$\le(\int_0^T(k_1(t)+1)dt+c+2k_0)\|x(\cdot)-x_1(\cdot)\|_{W_1^1}.$$

Пусть существует $\tilde{x}(\cdot)\in D$ такая, что $\Phi_\nu(\tilde{x}(\cdot))<\Phi_\nu(\bar{x}(\cdot))$ и пусть точка $x_0\in M$ такая, что $q(\tilde{x}(0))=\|\tilde{x}(0)-x_0\|$. Положим $p(t)=\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))$, $\delta=q(\tilde{x}(0))$. По лемме 3.1 существует решение $x_0(\cdot)$ задачи $\dot{x}_0(t)\in a(t,x_0(t))$, $x_0(0)=x_0$ такое, что

$$\|x_0(\cdot)-\tilde{x}(\cdot)\|_{W_1^1}\le\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)(q(\tilde{x}(0))+\int_0^T\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt).$$

Получим, что

$$q(\tilde{x}(0))+\int_0^T\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt=q(\tilde{x}(0))-q(\bar{x}(0))+\int_0^T(\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))-\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))dt\le$$

$$\le\|\tilde{x}(0)-\bar{x}(0)\|+\int_0^T(k(t)\|\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)\|+\|\dot{\tilde{x}}(t)-\dot{\bar{x}}(t)\|)dt\le(1+\int_0^T k(t)dt)\|\tilde{x}(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1}<(1+\int_0^T k(t)dt)\frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда следует, что $q(\tilde{x}(0))+\int_0^T\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt<(1+\int_0^T k(t)dt)\frac{\alpha}{\beta}$. Поэтому

$$\|x_0(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1}\le\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)(q(\tilde{x}(0))+\int_0^T\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt)+\|\tilde{x}(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1}\le$$

$$\le \left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)(1+m(T))\frac{\alpha}{e^{m(T)}(2+m(T))^2}+\frac{\alpha}{e^{m(T)}(2+m(T))^2}\le\alpha.$$

Положим $\nu \ge L\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)$. Тогда $J(x_0)\le J(\tilde{x})+L\|x_0-\tilde{x}\|_{W_1^1}\le J(\tilde{x})+\nu(q(\tilde{x}(0))+\int_0^T\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt)=\Phi_\nu(\tilde{x})<J(\bar{x}).$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Так как $e^{m(T)}(1+\int_0^T k(t)dt)\frac{\alpha}{\beta}\le\alpha-\frac{\alpha}{\beta}$, то из доказательства леммы 3.3 следует, что $q(\tilde{x}(0))e^{m(t)}+\int_0^T e^{m(t)-m(s)}\psi(s,\tilde{x}(s),\dot{\tilde{x}}(s))ds\le\alpha-\frac{\alpha}{\beta}$ при $\tilde{x}(\cdot)\in D$.

В п.3 используется из теории субдифференциала Кларка.

Пусть $f: X\to R_{+\infty}$, $x_0\in\operatorname{dom} f$. Положим (см.[15, с.92])

$$f^{[1]}(x_0;x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{\substack{(y,\alpha)\downarrow f^{x_0}\\ t\downarrow 0}}\inf_{z\in x+\varepsilon B}\frac{f(y+tz)-\alpha}{t},$$

где символ $(y,\alpha)\downarrow f^{x_0}$ означает, что $(y,\alpha)\in E(f)$, $y\to x_0$, $\alpha\to f(x_0)$.

Отметим, что если f липшицева функция вблизи x_0, то

$$f^{[1]}(x_0;x)=\limsup_{\substack{y\to x_0\\ \lambda\downarrow 0}}\frac{f(y+\lambda x)-f(y)}{\lambda}.$$

Положим $\partial_C f(x_0)=\{x^*\in X^*: f^{[1]}(x_0;x)\ge\langle x^*,x\rangle \text{ при } x\in X\}$.

Обозначим $\partial_C f(t,x,y)=\partial_C f_t(x,y)$.

Теорема 3.1. Пусть удовлетворяется условие леммы 3.3 и $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (3.1) минимизирует функционал (3.2). Тогда существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t))+\nu\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))+\nu q(\bar{x}(0)))$,

где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Доказательство. В силу леммы 3.3 $\Phi_\nu(\bar{x})\le\Phi_\nu(x)$ для $x\in D$. Поэтому $\Phi_\nu^0(\bar{x}:x)\ge 0$ при $x\in X$. Положив $\bar{f}(t,x,y)=f(t,x,y)+\psi_0(t,x)+\nu\psi(t,x,y)$ и $\bar{\varphi}(x,y)=\varphi(x,y)+\nu q(x)$ имеем, что

$$\left|\bar{f}(t,x_1,y_1)-\bar{f}(t,x_2,y_2)\right|\le(\nu k(t)+k_1(t)+1)\|x_1-x_2\|+(\nu+c)\|y_1-y_2\|,$$

$$\left|\bar{\varphi}(z_1,u_1)-\bar{\varphi}(z_2,u_2)\right|\le(k_0+\nu)\|z_1-z_2\|+k_0\|u_1-u_2\|$$

при $\|x_1-\bar{x}(t)\|\le\alpha$, $\|x_2-\bar{x}(t)\|\le\alpha$, $y_1, y_2\in X$, $\|z_1-\bar{x}(0)\|\le\alpha$, $\|z_2-\bar{x}(0)\|\le\alpha$, $\|u_1-\bar{x}(T)\|\le\alpha$, $\|u_2-\bar{x}(T)\|\le\alpha$. Если $x_n(\cdot)\in L_1([0,T],X)$ и последовательность $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ сходится к $\bar{x}(\cdot)$ в $L_1([0,T],X)$, то из теоремы 1.4.18 и 1.4.31[4, с.85, с.98] следует, что существует такая последовательность $\{x_m(\cdot)\}\subset\{x_n(\cdot)\}$ и $(x_m(\cdot))_{m\in N}$ почти всюду сходится к $\bar{x}(\cdot)$.

Пусть $(y_m(t))_{m\in N}$ сходится к $\bar{x}(t)$, $(\dot{y}_m(t))_{m\in N}$ почти всюду сходится к $\dot{\bar{x}}(t)$ и $\lambda_m\downarrow 0$, где $y_m(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Так как $\frac{1}{\lambda_m}(\bar{f}(t,(y_m(t),\dot{y}_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot{x}(t)))-\bar{f}(t,y_m(t),\dot{y}_m(t)))-(\nu k(t)+k_1(t)+1)\|x(t)\|+(\nu+c)\|\dot{x}(t)\|\le 0$, то по теореме Фату (см.[16, с.97]) имеем

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{\Phi_\nu(y_m+\lambda_m x)-\Phi_\nu(y_m)}{\lambda_m}\le\limsup_{m\to\infty}\int_0^T\frac{1}{\lambda_m}(\bar{f}(t,(y_m(t),\dot{y}_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot{x}(t)))-$$

$$-\bar{f}(t,y_m(t),\dot{y}_m(t))dt+\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}(\bar{\varphi}((y_m(0),y_m(T))+\lambda_m(x(0),x(T)))-\bar{\varphi}(y_m(0),y_m(T)))\le$$

$$\le\int_0^T\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}(\bar{f}(t,(y_m(t),z_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot{x}(t)))-\bar{f}(t,y_m(t),z_m(t)))dt+$$

$$+\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}(\bar{\varphi}((y_m(0),y_m(T))+\lambda_m(x(0),x(T)))-\bar{\varphi}(y_m(0),y_m(T))).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_\nu^{[1]}(\bar{x}:x)=\limsup_{\substack{y\to\bar{x}\\ \lambda\downarrow0}}\frac{\Phi_\nu(y+\lambda x)-\Phi_\nu(y)}{\lambda}\le\limsup_{\substack{y\to\bar{x}\ \text{в}\ W_1^1\\ \lambda\downarrow0}}\int_0^T\frac{1}{\lambda}(\bar{f}(t,(y(t),\dot{y}(t))+\lambda(x(t),\dot{x}(t)))-$$

$$-\bar{f}(t,y(t),\dot{y}(t)))dt+\limsup_{\substack{y\to\bar{x}\ \text{в}\ W_1^1\\ \lambda\downarrow0}}\frac{1}{\lambda}(\bar{\varphi}((y(0),y(T))+\lambda(x(0),x(T)))-\bar{\varphi}(y(0),y(T)))=$$

$$=\limsup_{\substack{y\to\bar{x}\ \text{в}\ C\\ \dot{y}\to\dot{\bar{x}}\ \text{в}\ L_1\\ \lambda\downarrow0}}\int_0^T\frac{1}{\lambda}(\bar{f}(t,(y(t),\dot{y}(t))+\lambda(x(t),\dot{x}(t)))-\bar{f}(t,y(t),\dot{y}(t)))dt+$$

$$+\limsup_{\substack{y\to\bar{x}\ \text{в}\ W_1^1\\ \lambda\downarrow0}}\frac{1}{\lambda}(\bar{\varphi}((y(0),y(T))+\lambda(x(0),x(T)))-\bar{\varphi}(y(0),y(T)))\le$$

$$\le\int_0^T\limsup_{\substack{y(t)\to\bar{x}(t)\\ z(t)\to\dot{\bar{x}}(t)\\ \lambda\downarrow0}}\frac{1}{\lambda}(\bar{f}(t,(y(t),z(t))+\lambda(x(t),\dot{x}(t)))-\bar{f}(t,y(t),z(t)))dt+$$

$$+\limsup_{\substack{(u,\upsilon)\to(\bar{x}(0),\bar{x}(T))\\ \lambda\downarrow0}}\frac{1}{\lambda}(\bar{\varphi}((u,\upsilon)+\lambda(x(0),x(T)))-\bar{\varphi}(y(0),y(T)))\le$$

$$\le\int_0^T\bar{f}^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x(t),\dot{x}(t)))dt+\bar{\varphi}^{[1]}(\bar{x}(0),\bar{x}(T);(x(0),x(T)))=\bar{\Phi}_\nu(x).$$

Поэтому $z(t)=0$ минимизирует функционал $\bar{\Phi}_\nu(x)$ в $W_1^1([0,T],X)$. Легко проверить, что для $\bar{\Phi}_\nu(x)$ также выполняются условия следствия 4.2[5]. Поэтому существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что выполнены соотношения 1) и 2) теоремы 3.1. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть удовлетворяется условие леммы 3.3 и $\bar{x}(\cdot)$ среди всех решений задачи (3.1) минимизирует функционал (3.2). Тогда существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t)))+\partial_C\omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))+\nu q(\bar{x}(0)))$

при $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Доказательство. По определению

$$\psi^{[1]}\left(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y)\right)=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\limsup_{\substack{(z,\omega)\to(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\\ \psi(t,z,\omega)\to0,\ \lambda\downarrow0}}\inf_{(x_1,y_1)\in(x,y)+\varepsilon B}\frac{\psi(t,(z,\omega)+\lambda(x_1,y_1))-\psi(t,z,\omega)}{\lambda},$$

где $B=\{(x,y)\in X\times Y:\|(x,y)\|\le1\}$. Пусть $u\in a(t,z)$ такое, что $\|\omega-u\|=\min_{\upsilon\in a(t,z)}\|\omega-\upsilon\|=\psi(t,z,\omega).$

Тогда ясно, что

$$\|u-\dot{\bar{x}}(t)\|\le\|u-\omega\|+\|\omega-\dot{\bar{x}}(t)\|=\psi(t,z,\omega)+\|\omega-\dot{\bar{x}}(t)\|\to0$$

при $\psi(t,z,\omega)\to 0,\ \|\omega-\dot{\bar{x}}(t)\|\to 0$. Кроме того

$$\psi(t,(z,\omega)+\lambda(x_1,y_1))\le\psi(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1))+\|\omega-u\|=\psi(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1))+\psi(t,(z,\omega)).$$

Поэтому

$$\nu\psi^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y))\le\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\substack{(z,u)\to(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\\ u\in a(t,z),\ \lambda\downarrow 0}}\sup\inf_{(x_1,y_1)\in(x,y)+\varepsilon B}\frac{\nu\psi(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1))}{\lambda}\le$$

$$\le\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\substack{(z,u)\to(x(t),\dot{\bar{x}}(t))\\ u\in a(t,z),\ \lambda\downarrow 0}}\sup\inf_{(x_1,y_1)\in(x,y)+\varepsilon B}\frac{\omega(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1))}{\lambda}=\omega^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y)),$$

т.е. $\nu\psi^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y))\le\omega^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y))$ при $t\in[0,T]$. Отсюда следует, что $\nu\partial_C\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\subset\partial_C\omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[0,T]$. Поэтому справедливость теоремы 3.2 вытекает из теоремы 3.1.

Известно, что $\partial_C\omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=N_{gra_t}(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[0,T]$, где $N_{gra_t}(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ нормальный конус к gra_t в точке $(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ в смысле Кларка (см.[15, с.54]) .

Отметим, что если $M\subset X$ замкнутое множество, $t\to gra_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто при $t\in[0,T]$, то положив $d(t,x,z)=\inf_{(u,\upsilon)\in gra_t}\|(u,\upsilon)-(x,z)\|,\ q(x)=\inf_{y\in M}\|y-x\|$ ограничение (3.1) можно написать в виде $q(x(0))+\int_0^T d(t,x(t),\dot{x}(t))dt=0$. Поэтому если $\bar{x}(t)$ минимизирует функционал (3.2) на множестве всех решений задачи (3.1) и $f(t,x,y)$ и $\varphi(x_1,x_2)$ удовлетворяет условие леммы 3.3, то по теореме 6.1.1[15, с.210] сушествуют одновременно не равные нулю числа $\lambda_0\ge 0$ и λ_1 такие, что $0\in\partial_C\widetilde{L}(\bar{x}(\cdot),\lambda_0,\lambda_1)$,

$$\widetilde{L}(x(\cdot),\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0\varphi(x(0),x(T))+\lambda_1 q(x(0))+\int_0^T(\lambda_0 f(t,x(t),\dot{x}(t))+\lambda_0\psi_0(t,x(t))+\lambda_1 d(t,x(t),\dot{x}(t)))dt$$

где .

(в теореме 6.1.1 надо положить $C=\{x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X):\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|\le\mu\},\ 0<\mu<\alpha$ и $L(x(\cdot),\lambda_0,\lambda_1)=\widetilde{L}(x(\cdot),\lambda_0,\lambda_1)+kd_C(x(\cdot))$). Отсюда следует, что $\widetilde{L}^{[1]}((\bar{x}(\cdot),\lambda_0,\lambda_1);x(\cdot))\ge 0$ при $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Поэтому анологична теореме 3.1 можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть $f(t,x,y)$ и $\varphi(x_1,x_2)$ удовлетворяет условие леммы 3.3, $M\subset X$ замкнутое множество, $t\to gra_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто при $t\in[0,T]$, $Q(t)$ непустое замкнутое множество, $t\to Q(t)$ измеримое отображение и $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (3.1) минимизирует функционал (3.2). Тогда существуют функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ и одновременно не равные нулю числа $\lambda_0\ge 0$ и λ_1 такие, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(\lambda_0 f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\lambda_0\psi_0(t,x(t))+\lambda_1 d(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))$ при $[0,T]$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\lambda_0\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))+\lambda_1 q(\bar{x}(0)))$.

Отметим, что $\lambda\partial_C d(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\subset N_{gra_t}(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $\lambda\ge 0$.

Пусть выполняется условие теоремы 3.1 и кроме того $a(t,x)$ выпуклое множество при всех (t,x). Используя теорему двойственности (см. [17], с.276) для задачи о кратчайшем расстоянии имеем

$$\psi(t,x,z)=\sup\{\langle y^*,z\rangle-\sup_{y\in a(t,x)}\langle y^*,y\rangle:\|y^*\|\le 1\}.$$

Положив $\omega^0(t,x,y^*)=\inf\{\langle y^*,y\rangle:\ y\in a(t,x)\}$ имеем, что

$$\nu\psi(t,x,z)=\sup\{\langle \nu y^*,z\rangle+\omega^0(t,x,-\nu y^*):\|y^*\|\le 1\}$$

при $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$. Пусть отображение $a(t,x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.3.

Тогда $\|a(t,x)\|\le\|a(t,\bar{x}(t))\|+k(t)\|x-\bar{x}(t)\|\le\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)$ при $x\in B(\bar{x}(t),\alpha)$, где $B(\bar{x}(t);\alpha)=\{x\in X:\|x-\bar{x}(t)\|\le\alpha\}$. Поэтому по лемме 3.2 имеем, что

$$|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_0,y_0^*)|\le k(t)\|x-x_0\|\max(\|y_0^*\|,\|y^*\|)+(\|a(t,\bar{x}(t))\|+$$
$$+k(t)\alpha)\|y^*-y_0^*\|\le(\nu k(t)+\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t))(\|x-x_0\|+\|y^*-y_0^*\|)$$

при $y^*,y_0^*\in\nu B_*,\quad x,x_0\in B(\bar{x}(t),\alpha),$ где $B_*=\{y^*\in X^*:\|y^*\|\le 1\}.$ Отсюда следует, что отображение $x\to\omega^0(t,x,y^*)$ при $y^*\in B_*$ удовлетворяет условию Липшица в $B(\bar{x}(t),\alpha)$ с коэффициентом $k(t)$. Положим

$$\partial_x^0\omega^0(t,x(t),-\nu y^*)=\overline{co}\{\xi\in X^*:\exists y_i^*\in B_*,\ y_i^*\to y^*,\ \exists x_i\in X,\ x_i\to\bar{x}(t),\ \exists\xi_i\in\partial_C^x\omega^0(t,x_i,-\nu y_i^*),\ \xi_i\to\xi\}.$$

Так как B_* является компактным и секвенциально компактным метрическим простран-ством индуцированной слабой со звездой топологией в X^* (см.[18, с.55]), то обозначив

$$\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=\{y^*\in X^*:\|y^*\|\le 1,\ \psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=\langle y^*,\dot{\bar{x}}(t)\rangle+\omega^0(t,\bar{x}(t),-y^*)\},$$

по теореме 2.8.2 [15, с.83] получим

$$\nu\partial_C\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\subset\{\int_{B_*}\partial_x^0\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*),\nu y^*)\mu(dy^*):\mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\},$$

где $P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]$ множества вероятностных мер Радона, сосредоточенных на $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$. Так как $\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=0$, то $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=\{y^*\in B_*:\omega^0(t,\bar{x}(t),-y^*)=\langle -y^*,\dot{\bar{x}}(t)\rangle\}$.

Из соотношения 1) теоремы 3.1 имеем

$$(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t)))+\{\int_{B_*}\partial_x^0\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*),\nu y^*)\mu(dy^*):\mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\}.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. Пусть выполняется условие теоремы 3.1 и кроме того $a(t,x)$ выпуклое множество при всех (t,x). Тогда, если $\bar{x}(t)$ минимизирует (3.2) на множестве всех решений задачи (3.1), то существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t)))+\{\int_{B_*}\partial_x^0\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*),\nu y^*)\mu(dy^*):\mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\}$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))+\nu q(\bar{x}(0)))$

при $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Из определения $\omega^0(t,\bar{x}(t),y^*)$ следует, что $y^*\to\omega^*(t,\bar{x}(t),y^*)$ вогнутая функция. Покажем, что множество $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ выпукло. Пусть $y_1^*,y_2^*\in\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ и $\alpha_1\ge 0,\ \alpha_2\ge 0,\ \alpha_1+\alpha_2=1$. Тогда имеем

$$\langle -\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*,\dot{\bar{x}}(t)\rangle=\alpha_1\omega^0(t,\bar{x}(t),-y_1^*)+\alpha_2\omega^0(t,\bar{x}(t),-y_2^*)\le\omega^0(t,\bar{x}(t),-\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*)\le\langle -\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*,\dot{\bar{x}}(t)\rangle.$$

Отсюда вытекает, что

$$\omega^0(t,\bar{x}(t),-\alpha_1 y_1^* - \alpha_2 y_2^*) = \left\langle -\alpha_1 y_1^* - \alpha_2 y_2^*, \dot{\bar{x}}(t)\right\rangle, \text{ т.е. } \alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* \in \Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)).$$

Так как отображение $y^* \to \omega^*(t,\bar{x}(t),y^*)$ удовлетворяет условию Липшица, то множество $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ замкнуто. Если $f(t,x,y) = f(t,x)$, то по теореме 1.6.13 [18, с.169] имеем, что $x^*(t) \in \nu\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$. Поэтому $\omega^0(t,\bar{x}(t),-x^*(t)) = \left\langle -x^*(t),\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle$.

Следствие 3.1. Пусть выполняется условие теоремы 3.1, $f(t,x,y) = f(t,x)$, $\varphi(x,y) = \varphi(y)$ и кроме того $a(t,x)$ выпуклое множество при всех (t,x). Тогда, если $\bar{x}(t)$ минимизирует (3.2) на множестве решений задачи (3.1), то существует функция $x^*(\cdot) \in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $\dot{x}^*(t) \in \partial_C(f(t,\bar{x}(t)) + \psi_0(t,\bar{x}(t))) + \{\int\limits_{B_*} \partial_x^o \omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*))\mu(dy^*) : \mu \in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\}$,

2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),-x^*(t)) = \left\langle -x^*(t),\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle$, 3) $x^*(0) \in \nu\partial_C q(\bar{x}(0))$,

4) $-x^*(T) \in \partial_C\varphi(\bar{x}(T))$, где $\nu \ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Рассмотрим другую методику решения невыпуклых задач для дифференциальных включений.

Лемма 3.4. Если X банахово пространство, функция $\psi : X \to R_{+\infty}$ удовлетворяет локальному условию Липшица в δ окрестности точки x_0, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha > 0$, где $\delta \ge \alpha > 0$, что

$$\varphi(x) = \psi(x_0) + \max_{p\in\partial_C\psi(x_0)}\langle p, x-x_0\rangle + \varepsilon\|x-x_0\| + \delta_{B(x_0,\alpha)}(x)$$

является внутренней выпуклой аппроксимацией [14, с.60] для $\psi(x)$ в точке x_0, т.е. $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi(x) \ge \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Пусть функция $\psi : X \to R_{+\infty}$ удовлетворяет локальному условию Липшица в δ окрестности точки x_0 с постоянной L. Тогда $\partial_C\psi(x) \subset LB_*$ при $x \in B(x_0,\delta)$, где $B_* = \{p \in X^* : \|p\|_* \le 1\}$. Если $x \in B(x_0,\delta)$, то по теореме 2.3.7 [15, с.46] Лебурга существует такая точка $u \in (x,x_0)$, что $\psi(x) - \psi(x_0) \in \langle \partial_C\psi(u), x-x_0\rangle$. По предложению 7.3.10 [11, с.411] отображение $x \to \partial_C\psi(x)$ полунепрерывно сверху в точке x_0 относительно нормы в X^*. Поэтому для $\varepsilon > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что $\partial_C\psi(x) \subset \partial_C\psi(x_0) + \varepsilon B_*$ при $x \in B(x_0,\alpha)$, где $B_* = \{p \in X^* : \|p\|_* \le 1\}$. Тогда получим, что $\psi(x) - \psi(x_0) \in \langle \partial_C\psi(x_0) + \varepsilon B_*, x-x_0\rangle$ при $x \in B(x_0,\alpha)$. Отсюда следует, что

$$\psi(x) - \psi(x_0) \le \sup_{p\in\partial_C\psi(x_0)+\varepsilon B_*}\langle p, x-x_0\rangle \le \sup_{p\in\partial_C\psi(x_0)}\langle p, x-x_0\rangle + \sup_{p\in\varepsilon B_*}\langle p, x-x_0\rangle$$

при $x \in B(x_0,\alpha)$. Тогда имеем $\psi(x) - \psi(x_0) \le \sup\limits_{p\in\partial_C\psi(x_0)}\langle p, x-x_0\rangle + \varepsilon\|x-x_0\|$ при $x \in B(x_0,\alpha)$. Лемма доказана.

Пусть выполняется условие леммы 3.3. Тогда из леммы 3.3 следует, что $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал

$$\Phi_\nu(x(\cdot)) = \bar{\varphi}(x(0),x(T)) + \int_0^T \bar{f}(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$

на множестве $D = \left\{x \in W_1^1([0,T],X) : \|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1} < \frac{\alpha}{\beta}\right\}$ при $\nu \ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$, где $\bar{\varphi}(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2) + \nu q(x_1)$, $\bar{f}(t,x,y) = f(t,x,y) + \psi_0(t,x) + \nu\psi(t,x,y)$. Применяя леммы 3.4 получим, что существует функция $\alpha(t) > 0$ и число $\alpha_0 > 0$ такие, что $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(x(\cdot)) = \max_{p\in\partial_C\overline{\varphi}(\overline{x}(0),\overline{x}(T))}\left\langle p,(x(0)-\overline{x}(0),x(T)-\overline{x}(T))\right\rangle + \int_0^T\Big(\max_{(p_1(t),\,p_2(t))\in\partial_C\bar{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))}\left\langle(p_1(t),p_2(t)),(x(t)-\overline{x}(t),\dot{x}(t)-\dot{\overline{x}}(t))\right\rangle + \varepsilon\left\|(x(t)-\overline{x}(t),\,\dot{x}(t)-\dot{\overline{x}}(t))\right\|\Big)dt + \varepsilon\left\|(x(0)-\overline{x}(0),x(T)-\overline{x}(T))\right\|$$

при $(x(0),x(T))\in B((\overline{x}(0),\overline{x}(T)),\alpha_0)$, $(x(t),\dot{x}(t))\in B((\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t)),\alpha(t))$, где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Предположим, что для $\varepsilon>0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)\ge\overline{\alpha}_\varepsilon$ при $t\in[0,T]$. Отметим, что если для $\varepsilon>0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\partial_C\bar{f}(t,x,y)\subset\partial_C\bar{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))+\varepsilon(B_*\times B_*)$ при $(x,\,y)\in B((\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t)),\overline{\alpha}_\varepsilon)$, то можно положить $\alpha(t)=\overline{\alpha}_\varepsilon$. Обозначив $z(t)=x(t)-\overline{x}(t)$ имеем, что $\overline{z}(t)=0$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(z(\cdot)) = \max_{p\in\partial_C\overline{\varphi}(\overline{x}(0),\overline{x}(T))}\left\langle p,(z(0),z(T))\right\rangle + \int_0^T\Big(\max_{(p_1(t),p_2(t))\in\partial_C\bar{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))}\left\langle(p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t))\right\rangle + \varepsilon\left\|(z(t),\dot{z}(t))\right\|\Big)dt + \varepsilon\left\|(z(0),z(T))\right\|$$

при $(z(0),z(T))\in B((0,0),\alpha_0)$, $(z(t),\dot{z}(t))\in B((0,0),\overline{\alpha}_\varepsilon)$, где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$. Тогда получим, что $\overline{z}(t)=0$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(z(\cdot)) = \max_{p\in\partial_C\overline{\varphi}(\overline{x}(0),\overline{x}(T))}\left\langle p,(z(0),z(T))\right\rangle + \int_0^T\Big(\max_{(p_1(t),p_2(t))\in\partial_C\bar{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))}\left\langle(p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t))\right\rangle + \varepsilon\left\|(z(t),\dot{z}(t))\right\|\Big)dt + \varepsilon\left\|(z(0),z(T))\right\|$$

при $z(\cdot)\in W_\infty^1([0,T],X)=\{x(\cdot)\in C([0,T],X):\dot{x}(\cdot)\in L_\infty([0,T],X)\}$, где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Лемма 3.5. Пусть выполняется условие леммы 3.3 и для $\varepsilon>0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)>\overline{\alpha}_\varepsilon$ при $t\in[0,T]$. Тогда $\overline{z}(t)=0$ минимизирует функционал

$$\Phi_0(z(\cdot)) = \max_{p\in\partial_C\overline{\varphi}(\overline{x}(0),\overline{x}(T))}\left\langle p,(z(0),z(T))\right\rangle + \int_0^T\Big(\max_{(p_{1(t)},p_2(t))\in\partial_C\bar{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))}\left\langle(p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t))\right\rangle$$

при $z(\cdot)\in W_\infty^1([0,T],X)$, где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $\overline{x}(\cdot)\in W_\infty^1([0,T],X)$ такое, что $\Phi_0(\overline{x}(\cdot))<0=\Phi_0(0)$, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ из определения $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ следует, что $\Phi_\varepsilon(\overline{x}(\cdot))<0$. По условию $\overline{z}(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ в $W_\infty^1([0,T],X)$ и $\Phi_\varepsilon(\overline{z})=0$. Получим противоречие. Лемма доказана.

Так как $W_\infty^1([0,T],X)$ плотно в $W_1^1([0,T],X)$ и $\Phi_0(z(\cdot))$ непрерывная функция в $W_1^1([0,T],X)$, то имеем, что $\overline{z}(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi_0(z(\cdot))$ в $W_1^1([0,T],X)$, т.е. $\Phi_0(z(\cdot))\ge\Phi_0(0)=0$ при $z(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Поэтому из следствия 4.2[5] имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 3.2. Если выполняется условие леммы 3.3 и для $\varepsilon>0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)>\overline{\alpha}_\varepsilon$ при $t\in[0,T]$ и $\overline{x}(t)$ минимизирует функционал (3.2) на мно-жестве всех решений задачи (3.1), то существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))+\psi_0(t,\overline{x}(t))+\nu\psi(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t)))$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\varphi(\overline{x}(0),\overline{x}(T))+\nu q(\overline{x}(0)))$, где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Рассмотрим среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M,\ x(t)\in Q(t) \tag{3.3}$$

минимизации функционала

$$J(x) = \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \quad . \tag{3.4}$$

Пусть выполняется условие леммы 3.3. Положив $\psi(t,x,z) = \inf_{u \in a(t,x)} \|u - z\|$, $q(x) = \inf_{y \in M} \|y - x\|$ $\psi_0(t,x) = \inf_{\upsilon \in Q(t)} \|\upsilon - x\|$, ограничение (3.3) можно написать в виде

$$q(x(0)) + \int_0^T (\psi(t, x(t), \dot{x}(t)) + \psi_0(t, x(t)))dt = 0 \quad ,$$

где $x(\cdot) \in W_1^1([0,T], X)$, $\|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\| \le \alpha$. Пусть $\bar{x}(t)$ минимизирует функционал (3.4) на множестве всех решений задачи (3.3). Тогда если выполняется условие леммы 3.3 , то по теореме 6.1.1[15, с.210] сушествуют одновременно не равные нулю числа $\lambda_0 \ge 0$ и λ_1 такие, что $0 \in \partial_C L(\bar{x}(\cdot), \lambda_0, \lambda_1)$, где

$$L(x(\cdot), \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \varphi(x(0), x(T)) + \lambda_1 q(x(0)) + \int_0^T (\lambda_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda_1 \psi(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda_1 \psi_0(t, x(t)))dt \quad .$$

Отсюда следует, что $L^{[1]}((\bar{x}(\cdot), \lambda_0, \lambda_1); x(\cdot)) \ge 0$ при $x(\cdot) \in W_1^1([0,T], X)$. Поэтому анологична теореме 3.1 можно показать, что верна следующая теорема .

Теорема 3.5. Пусть удовлетворяется условие леммы 3.3 и $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (3.3) минимизирует функционал (3.4). Тогда существуют функция $x^*(\cdot) \in W_1^1([0,T], X^*)$ и одновременно не равные нулю числа $\lambda_0 \ge 0$ и λ_1 такие, что

1) $(\dot{x}^*(t), x^*(t)) \in \partial_C(\lambda_0 f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + \lambda_1 \psi(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + \lambda_1 \psi_0(t, x(t)))$,

2) $(x^*(0), -x^*(T)) \in \partial_C(\lambda_0 \varphi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) + \lambda_1 q(\bar{x}(0)))$.

Отметим, что теоремы 3.3 и 3.5 информативны лишь, когда $\lambda_0 \ne 0$. Но используя [19] можно улучшить этих теорем. Также можно считать, что $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = 1$.

Аналогично можно получить необходимые и достаточные условия экстремума для экстремальных задач дифференциальных включений в пространстве $W_p^1([0,T], X)$, $1 < p \le +\infty$ (см. [2], с.263-344).

Так как X сепарабельное пространство, везде интеграл понимается в смысле Бохнера.

Используя другое определение интеграла векторных функций (см.[20, с.89], [21, с.10]), полученные результаты можно обобщить и в том случае, когда X пространство Фреше.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений.-Канд. диссертация. -Баку, 1983.-116с.
2. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.-359 p.
3. Садыгов М.А.Экстремальные задачи для включений в частных произ- водных. - Deutschland: LAMBERT Academic Publiashing, 2015.-390 p.
4. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.- М.: Мир, 1979.-400 с.
5. Садыгов М.А. Обобщенная задача Больца. // Eurasian scince journal.- 2020.- (к печате).
6. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу. -Баку: Элм, 1999.-135 с.
7. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. - Новосибирск: Наука, 1986.- 296с.
8. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. -Баку: Элм, 2002.-125 с.
9. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в терию многозначных отображений. - Воронеж, 1986.-103 с.
10. Иоффе А.Д., Левин В.Л.Субдифференциалы выпуклых функций. //Труды Математического общества, т.26, 1972. - с.3-73.
11. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. -М.:Мир, 1988.- 510 с.
12. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения.- М.: Мир, 1988.- 264 с.
13. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.- 479с.
14. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем.-Баку: Изд-во Азерб.Тех-кого Ун-та, 1996.-148 с.
15. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ.- М.:Наука, 1988.-280 с.
16. Федерер Г. Геометрическая теория меры.- М.: Наука, 1987.-760 с.

17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.- М.: Наука,1979.- 429 с.

18. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функцио- нальными уравнениями. -М. : Наука, 1977.-623 с.

19. Садыгов М.А.Необходимые условия минимума в анормальных задачах с ограничениями. // Eurasian scince journal.- 2019.- 5(62).- С.46-51.

20. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.-443 с.

21. Бурбаки Н. Иитегрирование.- М.:Наука, 1970.-320 с.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА БОЛЬЦА

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет

АННОТАЦИЯ

В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для обобщенной задачи Больца в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Изучаются субдифференциал интегрального и терминального функционала в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала.

ABSTRACT

In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for an extremum for the generalized Boltz problem in the space of Banach-valued absolutely continuous functions. We study the subdifferential of the integral and terminal functional in the space of Banach-valued absolute continuous functions. Note that the minimizing function in the general case is not an internal point of the domain of definition of a functional.

Ключевые слова: необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал.

Key words: necessary condition, Lipschitz function, subdifferential.

1. Введение

В работе исследуется выпуклая вариационная задача, заданная в пространстве абсолютно непрерывных функций. Изучаются субдиффе-ренциал интегрального и терминального функционала в пространстве абсолютно непрерывных функций. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами, но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала.

Работа является обобщением некоторых результатов работ автора в ([1], [2, с.82-106], [3, с.263-344]), где получены необходимые и достаточные условия минимума для обобщенной задачи Больца в пространстве $n-$ мерных абсолютно непрерывных функций. В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для обобщенной задачи Больца в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций.

2. О непрерывности интегрального функционала

Пусть X сепарабельное банахово пространство, $1 \le p < \infty$. Через $C([t_0,t_1],X)$, как обычно, будем обозначать пространство непрерывных функций $x:[t_0,t_1] \to X$ с нормой $\|x(\cdot)\|_C = \max\{\|x(t)\| : t \in [t_0,t_1]\}$. Обозначим через $L_p([t_0,t_1],X)$ множество (эквивалентных классов) таких измеримых функций $x:[t_0,t_1] \to X$, что $\int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^p dt < +\infty$ при $1 \le p < \infty$ и $\operatorname{esssup}\{\|x(t)\| : t \in [t_0,t_1]\} < \infty$ при $p = +\infty$ (см. [4, с. 96]).

Символом $W_p^1[t_0,t_1],X)$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерыв-ных функций из $[t_0,t_1]$ в X первая производная по Фреше, которых принадлежит $L_p([t_0,t_1],X)$, т.е. положим $W_p^1([t_0,t_1],X) = \{x(\cdot) \in C([t_0,t_1],X) : \dot{x}(\cdot) \in L_p([t_0,t_1],X)\}$. Обозначим $X^* = L(X,R)$, где $L(X,R)$ - банахово пространство линейных непрерывных функционалов заданных на X. Отметим, что при каждом $x^* \in X^*$ и из $x(\cdot) \in W_p^1[t_0,t_1],X)$ следует абсолютная непрерывность числовой функции $\langle x^*, x(t) \rangle$ на $[t_0,t_1]$. Норма в $W_p^1([t_0,t_1],X)$ может быть задана разными эквивалентными способами. Например