Summary. The method and algorithm has been suggested for constructing a multiplicatively weighted Voronoi diagram involving fuzzy parameters with optimal location of a finite number of generator points in a limited set of n-dimensional Euclidean space E_n. The method is based on the formulation of an appropriate continuous problem of optimal set partitioning into non-intersecting subsets, where the centers of these subsets are located involving fuzzy parameters in the objective functional and with the criterion of the partition quality, which provides an appropriate Voronoi diagram with fuzzy parameters. The method of solving the above problem of optimal set partitioning is based on the application of the mathematical apparatus developed in [11], while the method of neurolinguistic identification, developed in [8], was used to eliminate the fuzziness in the OSP problem.

Bibliographic References

1.Preparata F., Sheimos M. Computational geometry: an introduction. Springer. First Edition edition, 1993. 390 p.

2.Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations // Cybernetics and Systems Analysis, vol. 51, № 3, pp. 325-335 (2015). DOI 10.1007/s10559-015-9725-x.

3.Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning // Cybernetics and Systems Analysis, vol. 51, № 4, pp. 489-499 (2015). DOI: 10.1007/s10559-015-9740-y.

4. Aurenhammer F., Klein R., Lee D.-T. Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations. World Scientific Pub Co Inc, 2013. 337 p.

5.Okabe A., Boots B, Sugihara K., Chiu S.N. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams // West Sussex, England: John Wiley and Sons Ltd, second ed., 2000. 696 p.

6.Trubin Stanislav I. Information Space Mapping with Adaptive Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams // Thesis (M.S.) – Origon State University. – 2007.

7.Kiseleva E.M., Shor N.Z. Continuous problems of optimal set partitioning: theory, algorithms, applications. Kyiv: Naukova Dumka, 564 p. (2005) [in Russian].

8.Kiseleva E.M., Pritomanova O.M., Zhuravel S.V. Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional // Journal of Automation and Information Science, vol. 50, № 3, pp. 1-20 (2018). DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.

9.Shor, N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Boston; Dordrecht; London: Kluwer Acad. Publ., 412 p. (1998)

10.Stetsyuk P.I. Shor's r-Algorithms: Theory and Practice. In: Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko. Ed. by Butenko S., Pardalos P.M, Shylo V. Springer. 2017. P. 495–520.

11. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. An Algorithm to Construct Generalized Voronoi Diagrams with Fuzzy Parameters Based on the Theory of Optimal Partitioning and Neuro-Fuzzy Technologies. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2386/paper12.pdf.

УДК 519.622.1
ГРНТИ 27.41.1

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

Абрамова Вера Викторовна
Канд. ф.-м. наук,
доцент кафедры автоматизации и управления,
Набережночелнинский институт (филиал
Казанского (Приволжского) федерального университета,
Набережные Челны,

АННОТАЦИЯ

Данная работа посвящена методу коллокации решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром при производной, Основой исследований являются: общая теория приближённых методов анализа и конструктивная теория функций.

ABSTRACT

This paper is devoted to the method of collocation of the solution of first-order ordinary differential equations with the parameter for the derivative. The basis of the research is the general theory of approximate analysis methods and the constructive theory of functions.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, метод коллокации, обратный оператор, сходимость, скорость сходимости, оценка погрешности.

Keywords: differential equation, method of collocation, inverse operator, convergence, rate of convergence, estimation of error.

Рассмотрим однозначно разрешимую задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\varepsilon x'(t) + a(t)x(t) = y(t) \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $0 \leq t \leq 1$; ε — вещественный положительный (в том числе малый) параметр; $a(t), y(t)$ — заданные функции, $x(t)$ — искомая функция.

Для решения данной задачи применим метод коллокации. Приближённое решение будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^k, \tag{3}$$

где α_k — неизвестные коэффициенты, определяемые из условий

$$\varepsilon x'_n(t_i) + a(t_i)x_n(t_i) = y(t_i), i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$t_i \in [0,1]$ — узлы коллокации. Подставляя (3) в (4), получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_i^{k-1}[\varepsilon k + a(t_i)t_i] = y(t_i), i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

1. функции $a(t), y(t) \in H^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$;
2. задача $(1) - (2)$ имеет единственное решение $x^*(t)$ при $\forall y(t) \in C[0,1]$;
3. узлы коллокации являются узлами Чебышёва первого или второго рода:

$$t_i = \cos^2 \frac{2i-1}{4n}\pi, t_i = \cos^2 \frac{i\pi}{2n+2}, i = \overline{1,n}.$$

Тогда система (5) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ и приближённые решения

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* t^k$$

сходятся к точному решению $x^*(t)$ задачи $(1) - (2)$ в пространстве функций класса $C^{(1)}[0,1]$, удовлетворяющих условию (2), со скоростью

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x^* - x_n^*| \leq K_1(\varepsilon) \frac{\ln n}{n^\alpha} = O(\frac{\ln n}{n^\alpha}), \tag{6}$$

где $K_1(\varepsilon)$ — положительная постоянная, не зависящая от n, но, вообще говоря, зависящая от ε.

Доказательство. Пусть

$$X = \mathring{C}^{(1)}[0,1] = \{x(t): x(t) \in C^{(1)}[0,1], x(0) = 0\},$$

$$\| x \|_X = \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|, \forall x \in X;\ Y = C[0,1], \| y \|_Y = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|, \forall y \in Y.$$

Задача $(1) - (2)$ эквивалентна операторному уравнению

$$Ax = y\ (x \in X, y \in Y), Ax = \varepsilon x' + ax, \tag{7}$$

где A — линейный оператор из X в Y. Введём n-мерные подпространства: X_n — подпространство полиномов вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^k (X_n \subset X)$, Y_n — подпространство полиномов вида $\sum_{k=1}^{n} \beta_k t^{k-1} (Y_n \subset Y)$. Определим оператор P_n, переводящий Y в Y_n соотношением $P_n y = \sum_{i=1}^{n} y(t_i)\ell_i(t)$, где

$$\ell_i(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t-t_i)\omega'(t_i)}, \omega_n(t) = (t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n).$$

Известно, что P_n является однородным, аддитивным, проекционным оператором.
Тогда система (5) эквивалентна функциональному уравнению

$$A_n x_n \equiv P_n A x_n = y_n (x_n \in X_n, y_n = P_n y \in Y_n), A_n x_n = \varepsilon x_{n'} + P_n(a x_n). \quad (8)$$

Для $\forall x_n \in X_n$ находим

$$\| A x_n - A_n x_n \|_Y = \| A x_n - A_n x_n \|_C = \| a x_n - P_n(a x_n) \|_C \leq 2 \| P_n \|_{C\to C} E_{n-1}(a x_n)_C.$$

Так как t_i — узлы Чебышёва первого или второго рода, то (см.[2])

$$\| P_n \|_{C\to C} \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln(\frac{2n}{\pi}).$$

Следуя [2], [3], получим

$$E_{n-1}(a x_n)_C \leq 3\omega(a x_n; 1/n)_C < 3[\omega(a; 1/n)_C \| x_n \|_C + \| a \|_C \ \omega(x_n; 1/n)_C],$$

где $\omega(\varphi; \delta)_C$ — модуль непрерывности функции φ.
Представляя $x_n(t)$ в виде интеграла $x_n(t) = \int_0^t x_{n'}(\tau) d\tau$, получим оценку

$$|x_n(t)| \leq \int\limits_0^t |x_{n'}(\tau)| d\tau \leq \max_{0\leq t\leq 1} |x_{n'}(t)| t \leq \| x_n \|_X,$$

т.е. $\| x_n \|_C \leq \| x_n \|_X$.
Для $\omega(x_n; 1/n)_C$ имеем

$$\omega(x_n; \frac{1}{n})_C = \sup_{\substack{|t'-t''|\leq \frac{1}{n} \\ t',t''\in[0,1]}} |x_n(t') - x_n(t'')| = \sup_{\substack{|t'-t''|\leq \frac{1}{n} \\ t',t''\in[0,1]}} |x_{n'}(\tau)(t'-t'')| \leq$$

$$\leq \frac{\max\limits_{0\leq t\leq 1} |x_{n'}(t)|}{n} = \frac{\| x_n \|_X}{n}, t' < \tau < t''.$$

Известно (см., напр., [2], [3]), что для $a(t) \in H^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$

$$\omega(a; \frac{1}{n})_C \leq \frac{M}{n^\alpha}.$$

Поэтому

$$\| A x_n - A_n x_n \|_Y \leq \ 2[\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln(\frac{2n}{\pi})] \times$$

$$\times 3[\frac{M}{n^\alpha} \| x \|_C + \frac{1}{n} \| a \|_C \| x \|_X] \equiv \varepsilon_n \| x \|_X,$$

где

$$\varepsilon_n = 6[\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln(\frac{2n}{\pi})] \times [\frac{M}{n^\alpha} + \frac{1}{n} \| a \|_C] = O(\frac{\ln n}{n^\alpha}) \to 0,$$

при $n \to \infty$, или

$$\varepsilon_n \equiv \| A - A_n \|_{X_n \to Y} \to 0 \quad (9)$$

при $n \to \infty$.

Поскольку в условии теоремы оператор A — линейно обратим, то в силу соотношения (9) и способу введения подпространств $X_n, Y_n (\dim X_n = \dim Y_n = n < \infty)$ можем сделать вывод (см.[1, с.19], теорема 7):

при всех n, удовлетворяющих неравенству $q_n = \varepsilon_n \parallel A^{-1} \parallel < 1$ приближённое уравнение (8) имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, кроме того

$$\delta_n \equiv \parallel y - y_n \parallel_Y = \parallel y - P_n y \parallel_Y \leq 2 \parallel P_n \parallel_{C \to C} E_{n-1}(y)_C = O(\frac{\ln n}{n^\alpha}) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Поэтому (см. [1]) приближённые решения $x_n^* \in X_n$ сходятся к точному решению $x^* \in X$ по норме пространства X со скоростью

$$\parallel x_n^* - x^* \parallel_X = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O(\frac{\ln n}{n^\alpha}).$$

Пусть задана погрешность вычислений δ, т.е. $\parallel x_n^* - x^* \parallel_X \leq \delta$. Тогда

$$c \frac{\ln n}{n^\alpha} \leq \delta,$$

где $c = const$, и можно найти n_0, при котором достигается заданная точность:

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\ln n}{n^\alpha} \leq \frac{\delta}{c}.$$

Отсюда $n^\alpha \geq c/\delta$ или $n \geq (c/\delta)^{1/\alpha}$. Следовательно $n_0 = E[(c/\delta)^{1/\alpha} + 1]$, где $E[\varphi]$ — целая часть φ.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *приближённые операторы* A_n^{-1} *существуют и ограничены по норме в совокупности*

$$\parallel A^{-1} \parallel_{Y_n \to X_n} = O(1) \leq \overline{K}_1(\varepsilon)$$

для $n > n_0$, где $\overline{K}_1$ — положительная постоянная, не зависящая от n, но, вообще говоря, зависящая от ε.

Точное решение задачи $(1) - (2)$ записывается по формуле

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} y(s) \exp(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau) ds,$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Пусть $a(t) \leq a_0$, где $a_0 > 0$. Тогда $\parallel A^{-1} \parallel \leq \exp(a_0/\varepsilon)/\varepsilon$. Нормы обратных операторов $\parallel A_n^{-1} \parallel$ ограничены выражением (см.[1, с.19]:

$$\parallel A_n^{-1} \parallel \leq \frac{\parallel A^{-1} \parallel}{1 - \varepsilon_n \parallel A^{-1} \parallel} \leq \frac{\exp(a_0/\varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon_n \exp(a_0/\varepsilon)} \to \frac{\exp(a_0/\varepsilon)}{\varepsilon}$$

при $n \to \infty$.

Для $a(t) \leq -a_0$, где $a_0 \geq 0$, получаем

$$\parallel A_n^{-1} \parallel \leq \frac{\parallel A^{-1} \parallel}{1 - \varepsilon_n \parallel A^{-1} \parallel} \leq \frac{1}{\varepsilon \exp(a_0/\varepsilon) - \varepsilon_n} \to \frac{1}{\varepsilon \exp(a_0/\varepsilon)}$$

при при $n \to \infty$.

Особый практический интерес представляет случай, когда $\varepsilon \to 0$. Тогда при $a(t) \leq -a_0$, где $a_0 \geq 0$, получаем $\parallel A_n^{-1} \parallel \to 0$.

Теорема 2. *Пусть функции* $a(t), y(t) \in H_\alpha^r (0 < \alpha \leq 1, r > 0$ *— целое число). Тогда в условиях теоремы 1 приближённые решения* $x_n^*(t)$ *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *со скоростью,*

$$\parallel x^* - x_n^* \parallel_X \leq K_2(\varepsilon) \frac{\ln n}{n^{\alpha+r}} = O(\frac{\ln n}{n^{\alpha+r}}), \quad (10)$$

где $K_2(\varepsilon)$ — положительная постоянная, не зависящая от n, но, вообще говоря, зависящая от ε.

Доказательство. Задача $(1) - (2)$ эквивалентна операторному уравнению вида

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \ (x \in X, y \in Y),$$

где $Gx = \varepsilon x'(t); Tx = a(t)x(t); A: X \to Y(X, Y, X_n, Y_n$ введены в доказательстве теоремы 1); $G: X \to Y; T: X \to Y; G, T$ — линейные операторы.

Соответствующее приближённое уравнение имеет вид

$$A_n x_n \equiv P_n A x_n = y_n \ (x_n \in X_n, y_n = P_n y \in Y_n),$$

$$A_n x_n = G x_n + P_n T x_n, P_n T: X \to Y, G: X_n \to Y_n.$$

Докажем, что оператор G — линейно обратим. Пусть $Gx = z$, тогда

$$x = G^{-1} z = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t z(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \max_{0 \leq \tau \leq t} |z(\tau)| d\tau,$$

то есть $\| G^{-1} z \| \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{0 \leq t \leq 1} |z(t)|$ или $\| G^{-1} \|_{Y \to X} \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Однородность и аддитивность оператора G очевидна.

Поскольку $\| A - A_n \|_{Y_n \to Y} = \| T - P_n T \| \to 0$ при $n \to \infty$ (см. теорему 1), то следуя [1, с.27] имеем

$$\| x^* - x_n^* \|_X \leq \| E - A_n^{-1} P_n T \|_{X \to X} \| G^{-1} \|_{Y \to X} \| G x^* - P_n G x^* \|_Y \leq$$

$$\leq \{1 + K_1(\varepsilon) O(1)\} \| G^{-1} \|_{C \to C^{(1)}} 2 \| P_n \|_{C \to C} E_{n-1}(G x^*)_C \leq$$

$$\leq K_2(\varepsilon) \frac{\ln n}{n^{\alpha + r}} = O(\frac{\ln n}{n^{\alpha + r}}),$$

так как

$$E_{n-1}(G x^*) = O(\frac{1}{n^{\alpha + r}}) \ (G x^* \in H_\alpha^r); \ \| P_n \|_{C \to C} = O(\ln n);$$

$|A_n^{-1} \|_{Y_n \to X_n} \leq \overline{K}_1(\varepsilon)$ (см. следствие к теореме 1); $|P_n T \|_{X_n \to Y} = O(1)$.

Заданная погрешность вычислений δ достигается при $n > n_0$, где $n_0 \in \mathbf{N}$ — минимальное решение неравенства

$$K_2(\varepsilon) \frac{\ln n}{n^{\alpha + r}} \leq \delta$$

относительно n.

Список литературы

1. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Из-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

2. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.

3. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ОТ СКОРОСТИ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ПРИ ПНЕВМОЗАРЯЖАНИИ

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2020.6.71.614

Ачеева Э.А., Локьяева С.М., Лопушняк Е.В.

АННОТАЦИЯ

Широкое применение пневматического способа заряжания и транспортирования гранулированных взрывчатых веществ (ВВ) при ведении горных работ указывает на необходимость исследований недостатков, сопутствующих этому методу: а именно возникновение электризации в зарядном шланге. Электрический потенциал и заряд являются основными параметрами энергии, выделяющейся при разряде, количество теплоты которого идет на разогрев ВВ. В итоге, зная минимальные скорости движения потока аэровзвеси, можно контролировать величину электрического заряда, превышение которого ведет к незапланированному взрыву.

ANNOTATION

The wide use of pneumatic method of loading and portage of granular explosives (BB) at the conduct of mountain works specifies on the necessity of researches of defects concomitant to this method: namely an origin of electrification in a charge hose. Electric potential and charge are the basic parameters of the energy distinguished at a digit, the amount of warmth of thatgoes to the warming-up of VV. In the total, knowing the minimum