

## О КОСМОЛОГИИ С ВРАЩЕНИЕМ

Ихлов Б. Л.

## АННОТАЦИЯ

Показано, что спинурующая жидкость не может генерировать вращение Вселенной. Показано, что закон сохранения момента импульса в принципе не может объяснить снижение скорости вращения Вселенной. Сформулировано приближенное полуклассическое уравнение движения туманности Андромеды, решения которого накладывают жесткие ограничения на оценки современной скорости вращения Вселенной. Произведено сравнение планковской температуры с температурой, возникающей вследствие эффекта Унру, показывающее невозможность вращения в ранней Вселенной при существующих оценках.

**Ключевые слова:** анизотропия, рождение частиц, расширение

## ABOUT COSMOLOGY WITH ROTATION

Ikhlov B. L.

## ABSTRACT

It is shown that the spinning liquid can not generate the rotation of the universe. It is shown that the law of conservation of the angular momentum in principle cannot explain the decrease in the rotation speed of the universe. An approximate equation of the motion of the Andromeda nebula is formulated, the solutions of which impose severe limitations on the estimates of the modern rotation speed of the Universe. A Planck temperature is compared with the temperature that arises from the Unruh effect, showing the impossibility of rotation in the early Universe under existing estimates.

**Keywords:** anisotropy, birth of particles, expansion

## Введение

Любые исследования в физике должны быть оправданы, полученные результаты должны иметь физический смысл и актуальность, хотя бы для теории. Так ли это для космологии с вращением? Идея о вращении Вселенной высказана в [2, 9] и др. Обнаружение Берчем [8] анизотропии поляризации радиоизлучения внегалактических источников и последующее подтверждение результата его наблюдений группой Андреасяна дало повод объяснить крупномасштабную анизотропию Вселенной ее вращением. Хотя это объяснение подвергается сомнению [7]. Соответствующие наблюдаемые феномены описаны, например, в [10, 11]. Космологические модели с вращением разработаны в том числе в [4 - 6].

Ранее слабая анизотропия реликтового излучения,  $10^{-5}$ , служила для обоснования космологического принципа – однородности Вселенной. Но та же слабая анизотропия может служить для обоснования возможности вращения Вселенной.

Группа Майкла Лонго в рамках проекта Sloan Digital Sky Survey (SDSS) изучила изображения более 15000 спиральных галактик со стороны северного полюса Млечного Пути, определяя, в какую сторону они закручены - по часовой стрелке или против. Исследователи искали зеркальную симметрию во Вселенной, предполагая, что правых и левых галактик должно быть поровну. Оказалось же, что левых - тех, что вращаются против часовой стрелки, - заметно больше. На глубине порядка 1,2 млрд. световых лет асимметрия сохранялась. Нарушение симметрии - около 7%,

Идея вращения Вселенной как целого наталкивается на очевидные гносеологические трудности. Обычное вращение тела происходит относительно чего-то внешнего. В данном же случае этого внешнего не существует. Во-вторых, если в силу принципа относительности наблюдатель в

каждой точке является центром вращения, то число осей вращения, проходящих через этот центр – множество мощности континуума.

Отсутствие внешнего наблюдателя не обязывает отказаться от идеи вращения. Например, наблюдатель внутри вращающегося жидкостного шара или вращающегося цилиндра с водой немедленно обнаружит вращение и вычислит все его параметры. Например, постоянная Хаббла имела бы разные значения в разных направлениях и, соответственно, обнаруживалась бы релятивистская кориолисова сила, выраженная формулой Тирринга. (В случае наличия неких цилиндрических «стенок» возникал бы параболоид вращения с соответствующей метрикой, например, Эйнштейна-Розена, что, разумеется, не имеет физического смысла и не соответствует наблюдаемым данным.)

Преобразования Лоренца тоже можно представить как вращение в четырехмерном пространстве-времени, где ускорение подразумевает вращение 4-вектора скорости. Однако это «геометрическое» вращение не имеет отношения к поставленной проблеме, вращение 4-скорости не обязано проявляться в виде трехмерного вращения, ускорение не всегда есть трехмерное вращение. Если же вращение 4-вектора скорости означает трехмерное вращение, зачем вообще говорить о вращении 4-вектора скорости.

Что касается модели Гёделя с вращением 4-скорости. Делаются оценки трехмерной угловой скорости вращения  $10^{-20}$  рад/сек, близкой к оценке Берча [6, с. 13]. Но дело не в том, что модель Гёделя содержит замкнутые времениподобные мировые линии (утверждается, что при времени порядка  $10^{10}$  лет меняется понятие причинности, т.е. если подождать, то можно увидеть то, что давно трансформировалось и исчезло, мертвецов живыми и т.п.), а также не дает космологического расширения, причем космологическая постоянная

подгоняется. Просто если Гедель изначально закладывал в метрику трехмерную скорость вращения (правда, как множитель ко всем интервалам), то в аналогичных моделях эту трехмерную скорость просто приравнивают к угловой скорости вращения 4-вектора скорости. Причем если у Гёделя вращаются частицы пыли (галактики), то модель идеальной жидкости без давления [6, там же] вряд ли имеет физический смысл.

Существует также дифференциальное вращение, например, ядро Солнца и его мантия имеют разный период вращения, смерчи и циклоны также облают дифференциальным вращением. Однако и такое вращение не имеет отношения к проблеме и объясняется в рамках гидро-, газодинамики, теории плазмы, магнитной гидродинамики, релятивистской кинетики.

### Момент импульса

Замедление вращения Вселенной объясняют именно в рамках классического закона сохранения момента импульса, как следствие расширения Вселенной. Но это неверно. В теории гравитации нет законов сохранения энергии, импульса или момента импульса. Собственный момент импульса имеет вид:

$$L_d = \varepsilon_{abcd} (J^{ab} - Y^a p^b + Y^b p^a) p^c / m,$$

где  $\varepsilon_{abcd}$  - 4-символ Леви-Чивита,  $m$  - масса,  $p^a$  - 4-импульс,  $Y^a = J^{ab} p_b m^2$ ,  $J^{ab}$  - момент импульса относительно начала координат:

$$J^{ab} = \int (x^a T^{b0} - x^b T^{a0}) d^3x,$$

где интегрирование проводится по области, занятой системой. Есть инвариант 4-импульса для метрики Минковского  $p^2 = g_{ab} p^a p^b = mc^2$ , а закон изменения 4-момента импульса формулируется сложным образом, через эффективный тензор энергии-импульса, получаемый добавкой к обычному тензору псевдотензора Ландау-Лившица. 4-импульс и 4-момент импульса сохраняются лишь в линеаризованной теории и при введении калибровки. Очевидно, что отличие закона сохранения момента импульса в ОТО от классического в ранней Вселенной имеет существенное значение.

Для замкнутой Вселенной также не существует закона сохранения импульса или момента импульса. Более того, они вообще не определены, по той причине, что отсутствует пробное тело. Представления о действии закона сохранения момента импульса исходят из предположения 1) что при увеличении радиуса «в стороны», как у разводящей в стороны руки вращающейся на льду фигуристки, уменьшается частота вращения. Но для Вселенной эти стороны отсутствуют. 2) Исходят из предположения, что существует система отсчета с одной из осей, вокруг которой происходит вращение. Но для Вселенной такой системы отсчета нет. Следовательно, по аналогии с расширением Вселенной, можно говорить о вращении Вселенной лишь как об особом смещении ее частей друг относительно друга.

Покажем степень неадекватности понимания замедления вращения вселенной как действия закона сохранения импульса. Используем классический закон сохранения момента импульса  $J\omega = const$ , который должен показывать, что с расширением Вселенной угловая частота снижается. Поскольку  $J \propto r^2$ , а в инфляционной модели  $r \propto \exp(Ht)$ , то угловая частота уменьшается по закону  $\omega = \omega_{\text{планк}} e^{-2Ht}$ , (см. также [6, с. 109-110]).

Отсюда видно, что, с учетом того, что планковская угловая частота имеет 43-й порядок, современное значение  $H \approx 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ c}^{-1}$ , а время жизни Вселенной – примерно  $4,354 \cdot 10^{17} \text{ c}$ , современная угловая скорость вращения Вселенной должна быть невероятно большой, она уменьшается в сравнении с планковской всего лишь примерно в 7 раз. Очевидно, что переход к псевдовектору момента импульса в СТО  $L = m\vec{r} \times \vec{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  ничего не меняет, т.к.  $v = \omega r$ . Очевидно, что в не твердотельных моделях увеличение момента инерции еще медленнее уменьшает угловую скорость.

Допустим, что инфляционная модель верна, масштабный фактор увеличивается по экспоненциальному закону, но постоянная Хаббла много больше. Эпоха инфляции продолжалась от  $10^{-42}$  до  $10^{-36}$  сек. В это время  $10^{42} \text{ сек}^{-1} > H > 10^{36} \text{ сек}^{-1}$ . В таком случае за время инфляции угловая скорость уменьшилась либо опять же в 7 раз, либо, на другом пределе, практически до нуля. В последнем случае проблема вращения Вселенной как целого теряет физический смысл, тем более – актуальность. Например, оценка современного периода вращения Вселенной  $T = 10^{124}$  лет тоже лишает проблему вращения Вселенной актуальности и физического смысла. Следовательно, выбор для наивысшего порядка  $H$  явно небольшой, не более  $10^{37}$ , т.к.  $10^{38}$  уже снижает угловую скорость почти до нуля. При  $H = 10^{37}$  угловая скорость будет снижена в  $10^9$  раз до огромного значения  $10^{34} \text{ сек}^{-1}$ . Других вариантов нет. Если мы даже равномерно будем убирать инфляцию, т.е. равномерно снижать значение  $H$  от этой величины до современных значений, мы всё равно получим огромную современную скорость вращения Вселенной как целого.

### Туманность Андромеды

Существует уникальный «эксперимент»: 10 млрд. лет назад туманность Андромеды столкнулась с нашей галактикой, затем галактики разошлись и снова стали сближаться. Если бы Вселенная вращалась, на галактики действовали бы разные центробежные силы, пропорциональные  $\omega^2 r$ , в силу принципа относительности - в любой системе отсчета.

В силу принципа относительности при вращении Вселенной туманность Андромеды вращается вокруг нас.

Точная задача двух тел в случае силы, обратно пропорциональной квадрату радиуса, дает траектории трех типов: эллипс, парабола и гипербола, в зависимости от параметров (начальной скорости, начального расстояния и масс). Но не столкновение. При учете хаббловского отталкивания задача усложняется, но даже эллипса в таком случае получить не может, не говоря уже о столкновении. Траектории типа падения спутника возникают лишь в случае, когда одна из масс много меньше другой, но если бы Земля была точкой – столкновения все равно бы не было. Столкновения других галактик во Вселенной происходит из-за их начальных скоростей, из-за того, что они следуют встречным курсом.

Решение задачи двух тел при нескольких разнородных силах несколько сложно, поэтому будем решать задачу движения Млечного пути и туманности Андромеды грубо, в одномерном приближении, для качественной оценки. Тем более, что скорости двух галактик – не в плоскости, а на одной линии. Уравнение движения сведется к уравнению для модуля радиуса (расстояния между галактиками) и с учетом «силы» Хаббла будет иметь вид

$$r^2\ddot{r} - Hr^2\dot{r} + \gamma m_1 = 0$$

где  $m_1$  – масса нашей галактики,  $m_2$  – масса туманности Андромеды.

Компьютерное моделирование показывает, что данное уравнение имеет решение, соответствующее движению двух галактик навстречу друг другу с почти постоянной скоростью, что близко к экспериментальным данным.

При вращении появляется дополнительный член с центробежным ускорением:

$$r^2\ddot{r} - Hr^2\dot{r} + \gamma m_1 - \omega^2 r^3 = 0$$

Сделаем уравнение безразмерным, введем  $R^3 = \frac{\gamma m_1}{H^2} r^3$  и  $\tau = Ht$ . Уравнение примет вид:

$$R^2\ddot{R} - R^2\dot{R} - \frac{\omega^2}{H^2} R^3 = -1$$

Используем оценку современно скорости вращения Вселенной -  $10^{-13}$ . Подставим значения:

$$\ddot{R} - \dot{R} - 10^{25} \cdot R = -\frac{1}{R^2}$$

Данное уравнение не имеет решений, содержащих уменьшение радиуса до нуля (т.е. до столкновения). Частным решением является параболическое увеличение радиуса со временем, семейство решений содержит выход на стационарный режим.

В любом случае: при наличии вращения нужно вообразить, сколько оборотов совершила бы туманность Андромеды вокруг Млечного пути за  $10^{17}$  секунд, если даже представить невероятное (в рамках космологии с вращением): скорость вращения 10 млрд. лет назад была бы той же, что и по современным оценкам:  $10^{-11}$ – $10^{-13}$ . Это означает, что ни о каком центральном соударении не может быть речи, если существует вращение Вселенной

как целого. Реально - поскольку 10 млрд. лет назад скорость вращения была еще достаточно велика, после расхождения галактик они бы никак не могли начать сближение. Следовательно, если вращение Вселенной существует, оно не может быть классическим. Во всяком случае, оценка скорости вращения Вселенной как целого  $\omega \approx 10^{-13}$  явно неверна.

Можно было бы спасти гипотезу вращения Вселенной, если положить оценку  $\omega \approx 10^{-19}$ , что близко к оценке Берча  $10^{-20}$  рад/сек. Тогда расстояние между галактиками будет уменьшаться до нуля по параболическому, близкому к прямой, закону (частное решение), семейство решений – семейство стационарных радиусов при  $R \approx 1$ .

Однако при больших  $R > 100$  (размер много меньше планковского) видим, что не будет даже попытки сближения, т.к. в этом случае притяжением  $1/R^2$  можно пренебречь в сравнении с центробежной силой  $10^{-4}R$ . При гигантских расстояниях между галактиками как только возникает вращение, даже самое малое, о сближении галактик можно забыть.

#### Эффект Фуллинг-Унру

Если бы ранняя Вселенная вращалась с такой высокой скоростью, то есть, с таким ускорением, что было бы эквивалентно гравитации черной дыры, имел бы место эффект Унру, т.е. множественное рождение частиц. В таком случае вся история Вселенной была бы иной. (Избыток и дефицит мюонов на небесной сфере вряд ли может быть объяснен эффектом Унру, т.к. при угловой частоте  $10^{-11}$  –  $10^{-13}$  ускорение слишком мало.) Температура наблюдаемого излучения Унру выражается той же формулой, что и температура излучения Хокинга, но зависит не от поверхностной гравитации, а от ускорения системы отсчета  $a$ :

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k c} \approx 4 \cdot 10^{-21} \cdot a$$

с соответствующими размерностями. Поскольку  $a = \omega^2 r$ , то

$$T = \frac{\hbar \omega^2 r}{2\pi k c}$$

Если подставить планковский радиус

$$r_{\text{планк}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ м}, \text{ то температура,}$$

вызываемая эффектом Унру  $T \approx 10^{30} \text{ К}$ .

Однако. Эпоха инфляции начинается в момент времени  $10^{-42}$  сек. В «предшествующий» момент времени Большого взрыва  $10^{-43}$  сек температура была близка к планковской. Подставляя размер Вселенной в момент Большого взрыва  $r = 10^{-5} \text{ м}$  и планковскую  $\omega = 10^{43} \text{ с}^{-1}$ , получим  $T \approx 10^{60} \text{ К}$ , что явно не соответствует температуре планковской эпохи  $10^{32} \text{ К}$ . В любом случае эффект Унру при такой гигантской угловой скорости вызовет множественное рождение частиц, что

до неузнаваемости изменило бы историю Вселенной.

В [1, с. 88] указывается, что в ранней Вселенной пары частиц должны были рождаться на комптоновской длине в эру, определяемую комптоновским временем  $t_C = \hbar / mc^2$ . При  $t \ll t_C$  массивные частицы рождаться не могут, при  $t \gg t_C$  тоже, т.к. гравитационное поле слишком слабое. Однако, во-первых, при данных оценках рассматривается исключительно статическая метрика Фридмана. Во-вторых, не слишком логично рассматривать времена много большие комптоновского времени, критическое ослабление гравитационного поля может быть связано и с другими характерными временами. Не слишком логично и первое неравенство. Неясно, настолько порядков «много меньше». Уж если речь идет о комптоновской эпохе, более адекватны символы «приближенно» или «порядка», иначе говорить о комптоновской эре не имеет смысла. Наконец, комптоновское время вовсе не обязано быть временем рождения частиц. В противном случае в истории Вселенной отсутствовал бы бариогенез в период от  $10^{-35}$  с до  $10^{-31}$  с, поскольку комптоновское время, например, протона –  $10^{-24}$  с, и  $(10^{-35} - 10^{-31}) \ll 10^{-24}$ .

Если же рассматривать лептокварки, хотя такая модель напрашивается, например, отсутствие лептонного заряда переходит в отсутствие барионного заряда:  $e^+e^- \rightarrow J/\psi = c\bar{c}$ , одинаковое число типов кварков (ароматов) и лептонов, одинаковое число поколений – эти частицы еще только собираются найти на БАК. Их масса больше  $10^{15}$  ГэВ, соответственно, их комптоновское время –  $10^{-39}$  с.

То есть: если принять за правду, что комптоновское время есть время рождения частиц, то барионы могли рождаться в то время, которое лишь на три порядка отличалось от планковского, это было еще начало эпохи инфляции, потому угловая частота была того же порядка  $10^{43}$  с, следовательно, эффект Унру был значимым. С другой стороны, эффект Унру мог порождать не только барионы, но и лептоны и фотоны.

Можно оценить генерацию частиц в ранней Вселенной вследствие эффекта Унру в  $10^{72}$ .

То есть: вращение Вселенной не может выражаться через угловую скорость как вращение некоей сплошной или связанной дискретной среды. Либо оценка планковской частоты вращения завышена на 14 порядков, соответствующая частота должна быть такова  $\omega \ll 10^{28} \text{ с}^{-1}$

#### Моменты импульса частиц

Рассмотрим, что вращается во Вселенной. Это спиральные галактики, пульсары, медленно вращающиеся звезды, планеты. Главный вклад во вращение планет, очевидно, за исключением темной материи, возникает из вращения газопылевых облаков, из которых они возникают – помимо столкновения с другими планетами, приливного

взаимодействия со звездой или влияния других планет.

Все вращения в сумме – скомпенсированы. Если же Вселенная вращается, то нет компенсации, следовательно, какие-либо вращающиеся объекты во Вселенной должны быть закручены с гораздо большей скоростью, чем прочие, но этого не наблюдается.

Электроны вращаются вокруг ядер атомов. Классический момент импульса  $L = [r, p]$

Величина механического орбитального момента импульса электрона  $L$  выражается формулой  $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ , где  $l$  – орбитальное квантовое число (на  $s$ -уровне  $l = 0$ ; на  $p$ :  $l = 1$ ; на  $d$ :  $l = 2$  и т.д.).  $3/4$  атомов во Вселенной – это водород. Электрон в водороде имеет нулевой момент импульса, т.к. есть только один  $s$ -уровень. Соответственно,  $l = 0$  и  $L = 0$ .

Механический момент появляется на  $p$ -уровне лития,  $l = 1$ ,  $L^2 = 2\hbar^2$ .  $L = 1,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

Если реликтовое излучение рождается в эпоху первичной рекомбинации, то литий образуется уже в звездах, в эпоху реионизации. Всего атомов в наблюдаемой Вселенной –  $4 \cdot 10^{79} \div 10^{81}$ , немногим менее 98% из них – атомы, в которых электроны не имеют момента импульса, водород и гелий. Момент импульса возрастает от типа уровня, например, для  $g$ -уровня кадмия ( $l = 5$ ) он равен  $5,8 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ . Таким образом, общий механический момент всех атомов во Вселенной лежит в пределах  $(6 \cdot 10^{45} \div 1,6 \cdot 10^{48}) \text{ Дж} \cdot \text{с}$ . Добавление механического момента спина не сильно увеличит момент, т.к. он того же порядка, что и орбитальный момент, порядка постоянной Планка, не изменит ситуации и добавление механического момента ядер атомов. Полученная оценка значительно меньше оценочного момента импульса Вселенной. Если принять радиус Вселенной  $r = 45,7$  млрд. световых лет  $= 4,3 \cdot 10^{26} \text{ м}$  (наблюдаемая область,  $c/H$ ), угловую скорость  $\omega = 4,2 \cdot 10^{-13} \text{ рад} / \text{с}$ , а массу  $m = 6 \cdot 10^{52} \text{ кг}$ , то момент импульса в шаровой модели

$$L = \frac{2}{5} mr^2 \omega = 1,8 \cdot 10^{93} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Правда, в других источниках указываются не радианы в секунду, а радианы в год, как у Берча, но это мало что меняет в нашей жизни. Добавление скрытой массы только усиливает расхождение. Расчеты различных авторов варьируются, давая значения то на 6, то на 35 порядков ниже. Если даже представить, что все спины частиц во Вселенной некомпенсированны, то их момент импульса будет порядка  $10^{87} \hbar$ . Из огромной разницы порядков понятно, что, например, спинирующая жидкость Вейсенхоффа-Раабе, моделирующая нейтрон-протонный бульон в ранней Вселенной,

любое спинорное поле вряд ли могут индуцировать вращение Вселенной.

#### Несоответствие теоретических решений

В моделях, связанных с вращением, в т.ч. используется метрика Эйнштейна-Картана (см., напр., [3]). Сначала задается метрика какого-либо типа и примеряется к имеющимся космологическим параметрам – постоянной Хаббла, плотности материи, параметру замедления  $q_i$  ( $-0,8 - 0,01$ ), оценке угловой скорости вращения Вселенной.

Затем в метрику «помещается» спинурирующая жидкость, скалярное, электромагнитное поле и т.д. Неясно, как, например, спинурирующая жидкость в [3] может генерировать вращение Вселенной, если эффект кручения настолько мал, что не проявляется даже в нейтронных звездах. Однако в результате через несколько лет после написания работы обнаруживается, что замедления нет, а скорость изменения темпа расширения  $q_i > 0$ .

#### Заключение

Рассмотренные доводы против космологии с вращением указывают, что вращение Вселенной, если оно существует, не может иметь характер трехмерного вращения. Следовательно, обнаруженные феномены анизотропии не могут иметь отношения к вращению.

#### Литература

1. Гриб А. А. Основные представления современной космологии. М.: Физматлит. – 2008. – 108 с.

2. Иваненко Д.Д. Вращение Вселенной // Астрон. цирк. АН СССР. 1983. - №1254. - С.1 - 3.

3. Короткий В. А. Первоначальный нуклеосинтез в теории «горячей вселенной» с вращением. Ярославский педагогический вестник. 2011. - Т. III. - №4. – С. 81-84.

4. Кречет В. Г. Современные космологические данные и вращение Вселенной // Известия вузов. Физика. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 3–6.

5. Панов В. Ф. Вращающиеся космологические модели типа VIII по Бьянки // Известия вузов. Физика. — 1989. — №5. — С. 98–103.

6. Панов В. Ф., Павелкин В. Н., Кувшинова Е. В., Сандакова О. В. Космология с вращением. Пермь. - 2016. – 224 с.

7. Соколов И. Ю. Топологическая нетривиальность Вселенной и анизотропия реликтового излучения // Письма в ЖЭТФ.- 1993,- Т. 57.- Вып.10. - С.601-605.

8. Birch P. Is the universe rotating // Nature. - 1982. - V. 298. - №5873. - P. 451-454.

9. Godel, K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // Rev.Mod.Phys.– 1949. – V. 21. – P. 447–45.

10. Land K., Magueijo J. Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy // Physical Review Letters. - 2005. - Vol. 95. - P. 071301-071304. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.071301>.

11. Liddle A. R., Cortes M. Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe // Physical Review Letters. - 2013. - Vol. 111. - P. 111302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.111302.

УДК 519.65

## СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

*Коломоец Анатолий Андреевич*

*Канд. физ.-мат.наук, доцент кафедры  
«Прикладная математика и системный анализ», СГТУ им. Гагарина Ю.А.,  
Саратов*

*Ким Анастасия Анатольевна*

*Студент кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем»,  
СГТУ им. Гагарина Ю.А., Саратов*

#### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются численные методы Виддера, Gaver-Stehfest, разложения в ряд Фурье по синусам нечетных кратных дуг обращения преобразования Лапласа. Приводится сравнение перечисленных методов на примерах. Для численных методов составлены программы на языке программирования C#.

#### ABSTRACT

The article considers numerical methods of Widder, Gaver – Stehfest, Fourier sine series expansion in the case of Inversion of the Laplace Transform. These techniques have been compared using practical examples. The corresponding algorithms have been programmed using C# language.

Ключевые слова: метод Виддера, ряды Фурье, алгоритм Gaver-Stehfest, сравнение

Keywords: Widder's method, Fourier series, Gaver-Stehfest algorithm, compare

#### Введение

Обращение преобразования Лапласа часто используется для решения прикладных задач. Существует множество аналитических методов обращения, однако для большинства задач аналитические методы требуют больших вычислений или не позволяют найти оригинал функции по изобра-

жению. Для таких случаев были разработаны численные методы обращения преобразования Лапласа. Обзор и сравнение различных численных методов представлены в статье [6].