7.Raether H., (1964) Electron avalanches and breakdown in gases. London.

8.ShalemC.,ChechicR., BreskinA., et al. Nucl.Instr.and Meth. A558 (2006) 475-489.

9.CortesiM.,AlonR.,etal. 2007, JINST,2, 1-19.

10.Breskin A., (2008), CERN

11.Periale L.,Peskov V.,etal.Nucl. Instr. andMeth. A478 (2002) 377-383.

2-СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ И БИСУБДИФФЕРЕНЦИАЛ

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.7.67.390

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук,
профессор
Бакинский Государственный Университет

2-SUBDIFFERENTIAL AND BISUBDIFFERENTIAL

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu
doctor of physico-mathematical sciences,
professor
Baku State University

АННОТАЦИЯ

В работе изучены свойства 2-субдифференциала и бисубдифференциала. Если функция удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки, то доказано, что 2-субдифференциал и бисубдифференциал непустые ограничен-ные множества. Получена формула 2-субдифференциала функции максимума. Рассмотрены также некоторые обобщения 2-субдифференциала изучены его свойства.

ANNOTATION

In the paper are studied properties of the 2-subdifferential and bisubdifferential. If the function satisfies to the 2-Lipschitz condition in a neighborhood of the point, then it is proved that the 2-subdifferential and the bisubdifferential are nonempty bounded sets. The formula of the 2-subdifferential of the maximum function is obtained. Some generalizations of the 2-subdifferential are also considered and its properties are studied.

Ключевые слова: бисублинейная функция, условие билипшица, бисубдифференциал.

Key words: bisublinear function, bilpschitz condition, bisubdifferential.

1. О субдифференциала второго порядка

В п.1 даны определения 2-субдифференциала, бисубдифференциала и изучены их свойства.

В работе [1] и [2] рассмотрено определение субдифференциала произ-вольного порядка. В частности отсюда следует определение 2-субдифферен-циала функции f в точке x_0. В работе изучен ряд свойств субдифференциала $\partial_{\{2\}} f(x_0)$.

Пусть X -банахово пространство, $f: X \to R$. Положим

$$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=\sup_{z_1,z_2\in X}\overline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-$$

$$-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1)-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2)+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)),$$

$$f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=\inf_{z_1,z_2\in X}\underline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-$$

$$-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1)-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2)+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)).$$

Из определения непосредственно следует, что $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=f^{\{2\}}(x_0;x_2,x_1)$, $f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=f_{\{2\}}(x_0;x_2,x_1)$, и $f_{\{2\}}(x_0;-x_1,-x_2)=f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$, т.е. $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ и $f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ четные и симметричные функции. Например, положив $z_1=y_1-x_1$, $z_2=y_2-x_2$, где $y_1,y_2\in X^2$, из определения $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ имеем, что $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=f^{\{2\}}(x_0;-x_1,-x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$.

Используя определение $f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ и заменив z_1 через z_1-x_1 имеем

$$-f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=\sup_{z_1,z_2\in X}\overline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+$$
$$+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1)+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2)-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2))=$$
$$=\sup_{z_1,z_2\in X}\overline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2-\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2-\lambda_1 x_1)-$$
$$-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2)+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2))=f^{\{2\}}(x_0;-x_1,x_2).$$

Отсюда следует, что $f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=-f^{\{2\}}(x_0;-x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$.

Множество всех непрерывных линейных операторов из X в X^* обозна-чим через $L(X,X^*)$, а множество всех непрерывных билинейных отображений из $X\times X$ в R, обозначим через $B(X^2,R)$. Множество всех билинейных симмет-ричных непрерывных функций из $X\times X$ в R обозначим через $\overline{B}(X^2,R)$. Соответствие между $B(X^2,R)$ и $L(X,X^*)$, определяемое равенством $x^*(x_1,x_2)=(Ax_1)x_2$ взаимно однозначно. Функционал $Q(x)$, заданный в пространстве X, называется квадратичным функционалом, если существует такой билинейный симметричный функционал $x^*\in\overline{B}(X^2,R)$, что $Q(x)=x^*(x,x)$ при $x\in X$ (см.[3] и [4]). Отметим, что билинейный симметричный функционал x^* определяется по $Q(x)$ однозначно и $x^*(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(Q(x_1+x_2)-Q(x_1)-Q(x_2))$. Поэтому в дальнейшем симметричный билинейный функционал x^*, соответствующий симметричному оператору $A\in L(X,X^*)$ и квадратичному функционалу $Q(x)$ будем отождествлять.

Непрерывный билинейный симметричный функционал x^*, удовлет-воряющий неравенству

$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\ge x^*(x_1,x_2)$ при $x_1,x_2\in X$ назовем 2-субградиентом функции f в точке x_0, а множество 2-субградиентов в точке x_0 назовем 2-субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим через $\partial_{\{2\}}f(x_0)$ (см.[2], [5]).

Так как $f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=-f^{\{2\}}(x_0;-x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$, то получим, что

$$f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le x^*(x_1,x_2)\le f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) \text{ при } x^*\in\partial_{\{2\}}f(x_0) \text{ и } (x_1,x_2)\in X^2.$$

Если функции $x_1\to g(x_1,x_2)$ и $x_2\to g(x_1,x_2)$ положительно однородные и $g(0,x_2)=g(x_1,0)=0$, то функцию g назовем биположительно однородной. Если $x_1\to g(x_1,x_2)$ и $x_2\to g(x_1,x_2)$ выпуклые и положительно однородные функции и $g(0,x_2)=g(x_1,0)=0$, то функцию g назовем бисублинейной.

Отметим, что $\|x_1\|\cdot\|x_2\|$, $g(x_1,x_2)=\sup_{i\in I}b_i(x_1,x_2)$, где $b_i\in B(X^2,R)$ при $i\in I$ и $g(x_1,x_2)<+\infty$ при $(x_1,x_2)\in X^2$, бисублинейные функции.

Если $f(x)=b(x,x)$, где $b\in\overline{B}(X^2,R)$, то $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=2b(x_1,x_2)$.

Функцию $f:X\to R$ назовем 2-липшицевой с постоянной K в точке x_0, если f для некоторого $\varepsilon>0$ удовлетворяет условию

$$|f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)-f(x_0+x_2)+f(x_0)|\le K\|x_1\|\|x_2\|$$

при $x_1,x_2\in\varepsilon B$, где $B=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$.

Если для некоторого $\varepsilon>0$ удовлетворяется неравенство

$$|f(x+x_1+x_2)-f(x+x_1)-f(x+x_2)+f(x)|\le K\|x_1\|\|x_2\|$$

при $x\in x_0+\varepsilon B$ и $x_1,x_2\in\varepsilon B$, то функцию $f:X\to R$ назовем 2-липшицевой с постоянной K в окрестности точки x_0.

Легко проверяется, что если $f:X\to R$ 2-липшицевая с постоянной K в окрестности точки x_0 функция, то функция $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ бисублинейна, раздельно непрерывна и удовлетворяется неравенство $|f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)|\le K\|x_1\|\|x_2\|$ при $(x_1,x_2)\in X\times X$ (см. [2], лемму 4.8).

Отметим, что вычислить $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ трудно.

Обозначим $\overline{\partial}_{\{2\}} f(x_0) = \{x^* \in B(X^2, R) : f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) \ge x^*(x_1, x_2) \text{ при } x_1, x_2 \in X\}$.

Положим

$$f^{[2]}(x_0; x_1, x_2) = \overline{\lim_{\substack{z \to x_0, \\ \lambda_1 \downarrow 0,\ \lambda_2 \downarrow 0}}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(z + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(z + \lambda_1 x_1) - f(z + \lambda_2 x_2) + f(z))$$

и рассмотрим субдифференциал второго порядка (см. [6])

$$\partial_2 f(x_0) = \{b \in \overline{B}(X^2; R) : f^{[2]}(x_0; x_1, x_2) \ge b(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in X^2\}.$$

Функцию f назовем второго порядка s-дифференцируемой в точке x_0, если существует оператор $A \in L(X, X^*)$ такой, что

$$\lim_{z \to x_0,\ \lambda_1 \downarrow 0,\ \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(z + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(z + \lambda_1 x_1) - f(z + \lambda_2 x_2) + f(z)) = \langle A x_1, x_2 \rangle$$

при $x_1,\ x_2 \in X$. Ясно, что A симметричный оператор.

Если функция f второго порядка s-дифференцируема в точке x_0, то $\partial_2 f(x_0) = \partial_{\{2\}} f(x_0) = \{\langle A x_1, x_2 \rangle\}$.

Легко проверяется, что если $f : X \to R$ 2-липшицевая с постоянной K в окрестности точки x_0 функция, то функция f второго порядка s-дифферен-цируема в точке x_0 тогда и только тогда когда $\partial_2 f(x_0)$ состоит из единственного элемента.

Следствие 1.1. Если f 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0, то

$$f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) = \max\{x^*(x_1, x_2) : x^* \in \overline{\partial}_{\{2\}} f(x_0)\} = \max\{x^*(x_1, x_2) : x^* \in \partial_{\{2\}} f(x_0)\}.$$

Справедливость следствия 1.1 следует из [5] (см. с.92 и с.89).

Непрерывный квадратичный функционал $Q(x)$, удовлетворяющий неравенству $f_{\{2\}}(x_0; x, x) \le Q(x) \le f^{\{2\}}(x_0; x, x)$ назовем бисубградиентом функции f в точке x_0, а множество бисубградиентов в точке x_0 назовем бисубдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим $d_{\{2\}}f(x_0)$.

Множество всех непрерывных квадратичных функционалов обозначим $B_0(X)$.

Следствие 1.2. Если f 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0, то $f^{\{2\}}(x_0;x,x)=\max\{Q(x):Q\in d_{\{2\}}f(x_0)\}$, $f_{\{2\}}(x_0;x,x)=\min\{Q(x):Q\in d_{\{2\}}f(x_0)\}$.

Если учесть, что $\partial_{\{2\}}f(x_0)\subset d_{\{2\}}f(x_0)$, то справедливость следствия 1.2 вытекает из следствия 1.1 (см. также [5], с.89).

Если $C\subset X$, то положим $d_C(y)=\inf\{\|y-z\| : z\in C\}$ и $d_2(y) = d_C^2(y)$.

Пусть $(x_1, x_2) \in X^2$, $\|x_2\| \le \|x_1\|$ и $z \in C$. Тогда имеем

$$|d_2(z + x_1 + x_2) - d_2(z + x_1) - d_2(z + x_2) + d_2(z)| \le |d_2(z + x_1 + x_2) - d_2(z + x_1)| +$$

$$+ |d_2(z + x_2) - d_2(z)| = |d(z + x_1 + x_2) - d(z + x_1)||d(z + x_1 + x_2) + d(z + x_1)| +$$

$$+ |d(z + x_2) - d(z)||d(z + x_2) + d(z)| \le \|x_2\|(|d(z + x_1 + x_2) - d(z)| + |d(z + x_1) - d(z)|) +$$

$$+ |d(z + x_2) - d(z)|^2 \le \|x_2\|(\|x_1 + x_2\| + \|x_1\|) + \|x_2\|^2 \le \|x_2\|(\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_1\|) + \|x_1\|\|x_2\| \le 4\|x_1\|\|x_2\|.$$

Если X гильбертово пространство, $C \subset X$ выпуклое замкнутое множество и $x_1, x_2, z \in X$, то (см. [6], стр. 9)

$$|d_2(z + x_1 + x_2) - d_2(z + x_1) - d_2(z + x_2) + d_2(z)| \le 6\|x_1\|\|x_2\|.$$

Положим

$$Q_C(x_0) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : d_2^{\{2\}+}(x_0; x_1, x_2) \le 0\},$$

$$\Omega_C(x_0) = \{b \in \overline{B}(X^2; R) : b(x_1, x_2) \le 0 \text{ при } (x_1, x_2) \in Q_C(x_0)\}.$$

Лемма 1.1. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, то $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial_{\{2\}} d_2(x_0) \subset \Omega_C(x_0)$.

Доказательство. Пусть $b \in \bigcup_{\lambda>0} \lambda \partial_{\{2\}} d_2(x_0)$. Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что $b \in \lambda \partial_{\{2\}} d_2(x_0)$. Поэтому $\frac{b}{\lambda} = b_1 \in \partial_{\{2\}} d_2(x_0)$ и $d_2^{\{2\}+}(x_0; x_1, x_2) \geq b_1(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X \times X$. Так как из $(x_1, x_2) \in Q_C(x_0)$ следует, что $d_2^{\{2\}+}(x_0; x_1, x_2) \leq 0$. Поэтому $b_1(x_1, x_2) \leq 0$ при $(x_1, x_2) \in Q_C(x_0)$. Тогда имеем, что $b(x_1, x_2) = \lambda b_1(x_1, x_2) \leq 0$ при $(x_1, x_2) \in Q_C(x_0)$. Отсюда следует, что $b \in \Omega_C(x_0)$, т.е. $\bigcup_{\lambda>0} \lambda \partial_{\{2\}} d_2(x_0) \subset \Omega_C(x_0)$. Лемма доказана.

В доказательстве леммы 1.1 не используется тот факт, что $d_C^2(x)$ удовлет-воряет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0. Но если $d_C^2(x)$ удовлет-воряет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, то $\partial_{\{2\}} d_2(x_0)$ непусто.

Отметим, что множество $K \subset X \times X$ называется биконусом (см.[5]), если для любого $(x, y) \in K$ множества $K_y = \{z : (z, y) \in K\}$ и $K_x = \{u : (x, u) \in K\}$ выпуклые конусы.

Лемма 1.2. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, то $Q_C(x_0)$ является биконусом.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Q_C(x_0)$. Покажем, что $K_y = \{z \in X : (z, y) \in Q_C(x_0)\}$ является конусом. Если $x \in K_y$ и $\lambda \geq 0$, то имеем, что $d_2^{\{2\}+}(x_0; \lambda x, y) = \lambda d_2^{\{2\}+}(x_0; x, y) \leq 0$, т.е. $\lambda x \in K_y$. Если $x_1, x_2 \in K_y$, то имеем, что $d_2^{\{2\}+}(x_0; x_1 + x_2, y) \leq d_2^{\{2\}+}(x_0; x_1, y) + d_2^{\{2\}+}(x_0; x_2, y) \leq 0$.

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 \in K_y$. Получим, что K_y является конусом. Аналогично проверяется, что $K_x = \{u \in X : (x, u) \in Q_C(x_0)\}$ является конусом. Лемма доказана.

Пусть g функция из X в R и $Q \in B_0(X)$. Положим

$$g_+^*(Q) = \sup_{x \in X}\{Q(x) - g(x)\}, \quad g_-^*(Q) = \inf_{x \in X}\{Q(x) - g(x)\}.$$

Если $q : B_0(X) \to R \bigcup \{\pm\infty\}$, то положим $\operatorname{dom} q = \{Q \in B_0(X) : |q(Q)| < +\infty\}$.

Теорема 1.1. Если f 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0, то $Q \in d_{\{2\}} f(x_0)$ тогда и только тогда, когда $Q \in \operatorname{dom}\varphi_+^* \cap \operatorname{dom}\psi_-^*$, где $\varphi(x) = f^{\{2\}}(x_0; x, x)$, $\psi(x) = f_{\{2\}}(x_0; x, x)$.

Доказательство. Если $Q \in d_{\{2\}} f(x_0)$, то из следствия 1.2 получим $\min\{Q'(x) : Q' \in d_{\{2\}} f(x_0)\} \leq Q(x) \leq \max\{Q''(x) : Q'' \in d_{\{2\}} f(x_0)\}$.

Поэтому $Q(x) - \max_{Q \in d_{\{2\}} f(x_0)} Q(x) \leq 0 \leq Q(x) - \min_{Q \in d_{\{2\}} f(x_0)} Q(x)\}$. Отсюда получим, что

$$\sup_x\{Q(x) - \max_{Q \in d_{\{2\}} f(x_0)} Q(x)\} = \inf_x\{Q(x) - \min_{Q \in d_{\{2\}} f(x_0)} Q(x)\} = 0,$$

т.е. $\varphi_+^*(Q) = \psi_-^*(Q) = 0$ при $Q \in d_{\{2\}} f(x_0)$. Поэтому $Q \in \operatorname{dom}\varphi_+^* \cap \operatorname{dom}\psi_-^*$.

Покажем обратное утверждению. Так как

$$\varphi_+^*(Q) = \sup_x\{Q(x) - \varphi(x)\}, \quad \psi_-^*(Q) = \inf_x\{Q(x) - \psi(x)\},$$

то $\varphi_+^*(Q) \geq 0$, $\psi_-^*(Q) \leq 0$ при $Q \in B_0(X)$. Пусть существуют x_1 и x_2 такие, что $Q(x_1) - \varphi(x_1) > 0$ и $Q(x_2) - \psi(x_2) < 0$. Тогда

$$\varphi_+^*(Q) \geq \sup_{\lambda \geq 0}\{Q(\lambda x_1) - \varphi(\lambda x_1)\} = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^2 \{Q(x_1) - \varphi(x_1)\} = +\infty,$$

$$\psi_-^*(Q) \leq \inf_{\lambda \geq 0}\{Q(\lambda x_2) - \psi(\lambda x_2)\} = \inf_{\lambda \geq 0} \lambda^2 \{Q(x_2) - \psi(x_2)\} = -\infty.$$

Поэтому

$$\varphi_+^*(Q) = \begin{cases} 0, & Q \in \operatorname{dom}\varphi_+^* \\ +\infty, & Q \notin \operatorname{dom}\varphi_+^* \end{cases}, \quad \psi_-^*(Q) = \begin{cases} 0, & Q \in \operatorname{dom}\psi_-^* \\ -\infty, & Q \notin \operatorname{dom}\psi_-^* \end{cases}.$$

Отсюда следует, что если $Q \in \operatorname{dom}\varphi_+^* \cap \operatorname{dom}\psi_-^*$, то $\varphi_+^*(Q) = \psi_-^*(Q) = 0$, т.е.

$\sup_x\{Q(x) - \varphi(x)\} = \inf_x\{Q(x) - \psi(x)\} = 0$. Поэтому $Q \in d_{\{2\}} f(x_0)$. Теорема доказана.

Если $f_1 : X \to R$ и $f_2 : X \to R$ удовлетворяют 2-липшицеву условию с постоянной К, в окрестности точки x_0, то непосредственно проверяется, что $(f_1+f_2)^{\{2\}}(x_0;\, x_1, x_2) \le f_1^{\{2\}}(x_0;\, x_1, x_2) + f_2^{\{2\}}(x_0;\, x_1, x_2)$ при $x_1,\, x_2 \in X$. Поэтому

$\partial_{\{2\}}(f_1+f_2)^{\{2\}}(x_0) \subset \partial_{\{2\}}(f_1^{\{2\}}(x_0;\cdot)+f_2^{\{2\}}(x_0;\cdot))$, где

$\partial_{\{2\}}(f_1^{\{2\}}(x_0;\cdot)+f_2^{\{2\}}(x_0;\cdot)) = \{b \in \overline{B}(X^2,R) : f_1^{\{2\}}(x_0;\, x_1, x_2) + f_2^{\{2\}}(x_0;\, x_1, x_2) \ge b(x_1,x_2),\ x_1, x_2 \in X\}$. Если $A \subset \overline{B}(X^2, R)$, то $S-$оболочкой множества A назовем множество

$$SA = \{b \in \overline{B}(X^2,R) : \sup\{\tilde{b}(x_1,x_2) : \tilde{b} \in A\} \ge b(x_1,x_2) \ \text{при} \ x_1, x_2 \in X\}.$$

Используя $S-$оболочку множества имеем, что

$$\partial_{\{2\}}(f_1+f_2)^{\{2\}}(x_0) \subset S(\partial_{\{2\}}f_1(x_0) + \partial_{\{2\}}f_2(x_0)).$$

Лемма 1.3. Если f удовлетворяет 2-липшицеву условию с постоянной К в окрестности точки x_0, то множества $\partial_{\{2\}}f(x_0)$ и $d_{\{2\}}f(x_0)$ ограничены.

Доказательство. Если $x^* \in \partial_{\{2\}}f(x_0)$, то $-f^{\{2\}}(x_0;-x_1,x_2) \le x^*(x_1,x_2) \le$

$\le f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2) \in X \times X$. Поэтому легко проверяется, что множество $\partial_{\{2\}}f(x_0)$ ограничено.

Пусть $Q \in d_{\{2\}}f(x_0)$ и $x^*(x_1,x_2) = \dfrac{1}{2}(Q(x_1+x_2) - Q(x_1) - Q(x_2))$. Легко имеем, что

$$-f^{\{2\}}(x_0;\, -x_1-x_2, x_1+x_2) - f^{\{2\}}(x_0;\, x_1,x_1) - f^{\{2\}}(x_0;\, x_2,x_2) \le 2x^*(x_1,x_2) \le$$
$$\le f^{\{2\}}(x_0;\, x_1+x_2, x_1+x_2) + f^{\{2\}}(x_0;\, -x_1,x_1) + f^{\{2\}}(x_0;-x_2,x_2)$$

при $x_1,\, x_2 \in X$. Поэтому множество $d_{\{2\}}f(x_0)$ ограничено. Лемма доказана.

Лемма 1.4. Пусть J конечное множество, f_i ($i\in J$) непрерывны и удовлетворяют 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 и $f(x)=\max\limits_{i\in J} f_i(x)$. Тогда $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) \le \max\limits_{i\in J(x_0)} f_i^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$,

где $J(x_0) = \{i\in J : f_i(x_0) = f(x_0)\}$.

Доказательство. Покажем, что существует $\alpha > 0$ такое, что $J(y) \subset J(x_0)$ при $\|y-x_0\|\le\alpha$. Случай $J(x_0) = J$ тривиален. Пусть $J(x_0) \ne J$. В самом деле, пусть $a = f(x_0) - \max\limits_{i\in J\setminus J(x_0)} f_i(x_0) > 0$, $\varepsilon = \dfrac{a}{3}$ и $\alpha > 0$ такое, что для всякого $i \in J$ выполнено $|f_i(y) - f_i(x_0)| \le \varepsilon$ при $\|y - x_0\| \le \alpha$. Легко можно проверить, что $|f(y) - f(x_0)| \le \varepsilon$ при $\|y - x_0\| \le \alpha$. Если $j \in J(y)$, то

$$f_j(x_0) \ge f_j(y) - \varepsilon = f(y) - \varepsilon \ge f(x_0) - 2\varepsilon = \max_{i\in J\setminus J(x_0)} f_i(x_0) + a - 2\varepsilon > \max_{i\in J\setminus J(x_0)} f_i(x_0).$$

Поэтому $j \in J(x_0)$. Возьмем $z_1, z_2 \in X$ и $x_1, x_2 \in X$. Пусть $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ такие, что $\|\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\| \le \alpha$. Ясно, что $J(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \subset J(x_0)$. Аналогично имеем, что существует $\delta > 0$ такое, что $J(y) \subset J(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$ при $\|y - x_0 - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2\| \le \delta$. Пусть $\mu > 0$ достаточно малое число такое, что $\|\lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2\| \le \delta$.

$$f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1\mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) -$$
$$- f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) =$$
$$= \max_{i\in J(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1\mu x_1 + \lambda_2\mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) -$$
$$- \max_{i\in J} f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - \max_{i\in J} f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2) \le$$
$$\le \max_{i\in J(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1\mu x_1 + \lambda_2\mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) -$$
$$- f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2)) \le$$
$$\le \max_{i\in J(x_0)} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1\mu x_1 + \lambda_2\mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) -$$
$$- f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2)).$$

Поэтому получим, что

$$f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)\le d=\sup_{z_1,z_2\in X}\inf_{\substack{\alpha>0,\\ \beta>0}}\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha,\\ 0<\lambda_2\le\beta}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-$$

$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)).$$

Из определения супремума следует, что для ε>0 существуют $z_1^\varepsilon,\ z_2^\varepsilon\in X$ такие, что

$$\inf_{\substack{\alpha>0,\\ \beta>0}}\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha,\\ 0<\lambda_2\le\beta}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$

$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))>d-\varepsilon.$$

Ясно, что

$$\inf_{\substack{\alpha>0,\\ \beta>0}}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha,\\ 0<\lambda_2\le\beta}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$

$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))\le f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2).$$

Поэтому для $\varepsilon>0$ существуют $\alpha_i^\varepsilon>0,\ \beta_i^\varepsilon>0$ такие, что

$$\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha_i^\varepsilon,\\ 0<\lambda_2\le\beta_i^\varepsilon}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$

$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))\le f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)+\varepsilon.$$

Положив $\alpha^\varepsilon=\min\limits_{i\in J(x_0)}\alpha_i^\varepsilon$, $\beta^\varepsilon=\min\limits_{i\in J(x_0)}\beta_i^\varepsilon$ получим

$$\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha^\varepsilon,\\ 0<\lambda_2\le\beta^\varepsilon}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$

$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))\le\max_{i\in J(x_0)}f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)+\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)\le\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha^\varepsilon,\\ 0<\lambda_2\le\beta^\varepsilon}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-$$

$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+$$

$$+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))+\varepsilon\le\max_{i\in J(x_0)}f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)+2\varepsilon.$$

Отсюда при ε→0 получим $f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)\le\max\limits_{i\in J(x_0)}f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)$. Поэтому

$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le\max\limits_{i\in J(x_0)}f_i^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $x_1,\ x_2\in X$. Лемма доказана.

2. О модификации субдифференциала второго порядка

Рассмотрим модификации определения субдифференциала второго порядка (см.[7]).

Пусть X банахово пространство, $f:X\to\overline{R}=R\bigcup\{\pm\infty\}$, $\operatorname{dom}f=\{x\in X:|f(x)|<+\infty\}$, $x_0\in\operatorname{dom}f$. Положим

$$f^{(2)+}(x_0;x_1,x_2)=\overline{\lim_{t_1\downarrow0,t_2\downarrow0}}\frac{1}{t_1t_2}(f(x_0+t_1x_1+t_2x_2)-f(x_0+t_1x_1)-f(x_0+t_2x_2)+f(x_0)),$$

$$f^{(2)-}(x_0;x_1,x_2)=\underline{\lim_{t_1\downarrow0,t_2\downarrow0}}\frac{1}{t_1t_2}(f(x_0+t_1x_1+t_2x_2)-f(x_0+t_1x_1)-f(x_0+t_2x_2)+f(x_0)),$$

где считаем, что $f(x_0+t_1x_1+t_2x_2)-f(x_0+t_1x_1)-f(x_0+t_2x_2)+f(x_0)=+\infty$, если $f(x_0+t_1x_1+t_2x_2)-f(x_0+t_1x_1)-f(x_0+t_2x_2)+f(x_0)$ не определено.

Обозначим (см.[7])

$$f^{2\hat{+}}(x_0;x_1,x_2)=\max\{f^{(2)+}(x_0;x_1,x_2),-f^{(2)+}(x_0;x_1,-x_2),-f^{(2)+}(x_0;-x_1,x_2)\},$$

$$f^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)=\max\{f^{(2)+}(x_0;x_1,x_2),-f^{(2)-}(x_0;x_1,-x_2),-f^{(2)-}(x_0;-x_1,x_2)\}.$$

Положим $\partial_2^{\mp}f(x_0)=\{b\in \overline{B}(X^2,R): f^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)\ge b(x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X\times X\}$.

Следующие утверждения взяты из [7].

Лемма 2.1. Если $X=R$, $(x_1,x_2)\to f^{(2)+}(x_0;x_1,x_2)$ и $(x_1,x_2)\to f^{(2)-}(x_0;x_1,x_2)$ конечные функции, то $f^{2\hat{+}}(x_0;x_1,x_2)$ и $f^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)$ бисублинейные функции.

Лемма 2.2. Если функция f 2-липшицевая в точке x_0, то

$$(f+g)^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)\le f^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)+g^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)$$

при $(x_1,x_2)\in X\times X$.

Лемма 2.3. $f^{2\hat{+}}(x_0;x_1,x_2)=f^{2\hat{+}}(x_0;x_2,x_1)$ и $f^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)=f^{2\mp}(x_0;x_2,x_1)$.

Ясно, что $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\ge f^{2\mp}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X\times X$.

Множество всех бисублинейных непрерывных симметричных четных функций из $X\times X$ в R обозначим через $BS(X^2)$.

Отметим, что если h бисублинейная непрерывная симметричная четная функция, то $x\to h(x,x)$ второй степени положительно однородная четная непрерывная функция. Если X гильбертово пространство, φ четная второй степени положительно однородная полунепрерывная снизу функция, то из следствия 1.3.7 [5] следует, что $\varphi(x)=\sup\{Q(x):Q\in d_2\varphi\}$, где $d_2\varphi=\{Q\in B_0(X):\varphi(x)\ge Q(x)$ при $x\in X\}$.

Квадратичная функция Q из $d_2\varphi$ называется главной, если не существует другая квадритичная функция Q_1 из $d_2\varphi$ такая, что $Q_1(x)\ge Q(x)$ при $x\in X$. Множество главных квадритичных функций из $d_2\varphi$ назовем главным бидифференциалом функции φ и обозначим через $d_2^m\varphi$. Ясно, что если X гильбертово пространство, то $\varphi(x)=\sup\limits_{Q\in d_2^m\varphi}Q(x)$ и

$$e(x_1,x_2)=\sup\{0{,}5(Q(x_1+x_2)-Q(x_1)-Q(x_2)):Q\in d_2^m\varphi\}$$

бисублинейная симметричная четная функция.

Если $h\in BS(X^2)$ удовлетворяет условию $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\ge h(x_1,x_2)\ge f^{2\mp}(x_0;x_2,x_1)$ при $(x_1,x_2)\in X\times X$, то функцию h назовем верхней бисублинейной аппроксимацией функции f в точке x_0. Верхняя бисублинейная аппроксимация h функции f в точке x_0 называется главной верхней аппроксимацией, если не существует другая верхняя бисублинейная аппроксимация h_1 такая, что $h(x_1,x_2)\ge h_1(x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X\times X$.

Если $h(x_1,x_2)$ верхняя бисублинейная аппроксимация функции f в точке x_0, то $\partial_2 h=\{b\in \overline{B}(X^2,R): h(x_1,x_2)\ge b(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in X\times X\}$ назовем верхним аппроксимативным бисубдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим через $\partial_2^a f(x_0)$. Если $h(x)$ главная верхняя бисублинейная аппроксимация функции f в точке x_0, то $\partial_2 h=\partial_2 h(0)$ назовем главным верхним аппроксимативным бисубдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим через $\partial_2^m f(x_0)$. Ясно, что $\partial_2^{\mp}f(x_0)\subset\partial_2^m f(x_0)$. Если $X=R$, то $\partial_2^{\mp}f(x_0)=\partial_2^m f(x_0)$.

Теорема 2.1. Если функция f достигает локального минимума (максимума) в пространстве X в точке x_0, то $-f^{(2)-}(x_0;x,-x)\ge 0$ ($f^{(2)+}(x_0;x,-x)\ge 0$) при $x\in X$.

Следствие 2.1. Если функция f достигает локального минимума в пространстве X в точке x_0, то $f^{2\mp}(x_0;x,x)\ge 0$ при $x\in X$.

Следствие 2.2. Если функция f достигает локального минимума в пространстве X в точке x_0 и h верхняя бисублинейная аппроксимация функции f в точке x_0, то $h(x,x)=\sup\limits_{x^*\in\partial_2 h}x^*(x,x)\ge 0$ при $x\in X$.

3. Частный 2-субдифференциал раздельно 2-липшицевых функций

Пусть X и Y банаховы пространства.

Лемма 3.1. Пусть I конечное множество, $f_i : X\times Y \to R,\ i\in I,$ непрерывные функции в множестве $(x_0+2\delta B_X)\times(y_0+2\delta B_Y)$, где $\delta>0$, и существует число $L>0$ такое, что $f_i(u+x,\upsilon+y)-f_i(u+x,\upsilon)-f_i(u,\upsilon+y)+f_i(u,\upsilon)\le L\|x\|\cdot\|y\|$ при $u\in x_0+\delta B_X,\ \upsilon\in y_0+\delta B_Y,\quad x\in\delta B_X,\ y\in\delta B_Y$ и $f(x,y)=\max\limits_{i\in I} f_i(x,y).$ Тогда для каждого $u\in x_0+\delta B_X,\ \upsilon\in y_0+\delta B_Y$ существует $\delta_0>0$, где $\delta_0\le\delta$ такое, что $f(u+x,\upsilon+y)-f(u+x,\upsilon)-f(u,\upsilon+y)+f(u,\upsilon)\le L\|x\|\cdot\|y\|$ при $x\in\delta_0 B_X,\ y\in\delta_0 B_Y$.

Доказательство. Обозначим $I(u,\upsilon)=\{i\in I: f(u,\upsilon)=f_i(u,\upsilon)\}$. Покажем, что существует $\alpha>0$ такое, что $I(x,y)\subset I(u,\upsilon)$ при $x\in u+\alpha B_X,\ y\in\upsilon+\alpha B_Y.$ Случай $I(u,\upsilon)=I$ тривиален. Пусть $I(u,\upsilon)\ne I$. Положим $b=f(u,\upsilon)-\max\limits_{i\in I/I(u,\upsilon)} f_i(u,\upsilon)>0$ и $\varepsilon=\frac{b}{3}.$ Тогда существует $\alpha>0$ такое, что для каждого $i\in I$ выполнено $|f_i(x,y)-f_i(u,\upsilon)|\le\varepsilon$ при $x\in u+\alpha B_X,$ $x\in u+\alpha B_X,\ y\in\upsilon+\alpha B_Y.$ Легко можно проверить, что $|f(x,y)-f(u,\upsilon)|\le\varepsilon$ при $x\in u+\alpha B_X,\ y\in\upsilon+\alpha B_Y.$ Если $j\in I(x,y),$ то

$$f_j(u,\upsilon)\ge f_j(x,y)-\varepsilon=f(x,y)-\varepsilon\ge f(u,\upsilon)-2\varepsilon=\max_{i\notin I(u,\upsilon)} f_i(u,\upsilon)+b-2\varepsilon>\max_{i\notin I(u,\upsilon)} f_i(u,\upsilon).$$

Поэтому $j\in I(u,\upsilon),$ т.е. $I(x,y)\subset I(u,\upsilon).$ Обозначим $\delta_0=\min\{\delta,\alpha\}.$ Если $\|x\|\le\delta_0,\ \|y\|\le\delta_0$, то

$$f(u+x,\upsilon+y)-f(u+x,\upsilon)-f(u,\upsilon+y)+f(u,\upsilon)\le\max_{i\in I(u,\upsilon)}(f_i(u+x,\upsilon+y)+f_i(u,\upsilon))-$$
$$-\max_{i\in I(u,\upsilon)} f_i(u+x,\upsilon)-\max_{i\in I(u,\upsilon)} f_i(u,\upsilon+y)\le\max_{i\in I(u,\upsilon)}(f_i(u+x,\upsilon+y)-f_i(u+x,\upsilon)-$$
$$-f_i(u,\upsilon+y)+f_i(u,\upsilon))\le L\|x\|\|y\|.$$

Лемма доказана.

Функция $f: X\times Y\to R$ называется раздельно 2-липшицевой в окрестноти точки (x_0,y_0) с постоянной L, если существует $\delta>0$ такое, что

$$|f(u+x,\upsilon+y)-f(u+x,\upsilon)-f(u,\upsilon+y)+f(u,\upsilon)|\le L\|x\|\cdot\|y\|$$

при $u\in x_0+\delta B_X,\ \upsilon\in y_0+\delta B_Y,\ x\in\delta B_X,\ y\in\delta B_Y$.

Если $(x,y)\in X\times Y$, то обозначим

$$f_{xy}((x_0,y_0);(x,y))=\sup_{u\in X,\upsilon\in Y}\ \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda\mu}(f(x_0+\lambda u+\lambda x,y_0+\mu\upsilon+\mu y)-$$
$$-f(x_0+\lambda u+\lambda x,y_0+\mu\upsilon)-f(x_0+\lambda u,y_0+\mu\upsilon+\mu y)+f(x_0+\lambda u,y_0+\mu\upsilon)).$$

Лемма 3.2. Если функция $f: X\times Y\to R$ раздельно 2-липшицевая в окрестности точки $(x_0,y_0),$ то $(x,y)\to f_{xy}((x_0,y_0);(x,y))$ бисублинейная функция.

Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in X$. Ясно, что

$$f_{xy}((x_0,y_0);x_1+x_2,y)=\sup_{u\in X,\upsilon\in Y}\ \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda\mu}(f(x_0+\lambda u+\lambda x_1+\lambda x_2,y_0+\mu\upsilon+\mu y)-$$
$$-f(x_0+\lambda u+\lambda x_1+\lambda x_2,y_0+\mu\upsilon)-f(x_0+\lambda u,y_0+\mu\upsilon+\mu y)+f(x_0+\lambda u,y_0+\mu\upsilon))=$$
$$\le\sup_{u\in X,\upsilon\in Y}\ \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda\mu}(f(x_0+\lambda u+\lambda x_1+\lambda x_2,y_0+\mu\upsilon+\mu y)-f(x_0+\lambda u+\lambda x_1+\lambda x_2,y_0+\mu\upsilon)-$$
$$-f(x_0+\lambda u+\lambda x_1,y_0+\mu\upsilon+\mu y)+f(x_0+\lambda u+\lambda x_1,y_0+\mu\upsilon))+$$

$$+\sup_{u\in X,\upsilon\in Y}\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda\mu}(f(x_0+\lambda u+\lambda x_1,y_0+\mu\upsilon+\mu y)-f(x_0+\lambda u+\lambda x_1,y_0+\mu\upsilon)-$$

$$-f(x_0+\lambda u,y_0+\mu\upsilon+\mu y)+f(x_0+\lambda u,y_0+\mu\upsilon))\}=f_{xy}((x_0,y_0);x_1,y)+f_{xy}((x_0,y_0);x_2,y).$$

Кроме того, $f_{xy}((x_0,y_0);\alpha x,y)=\alpha f_{xy}((x_0,y_0);x,y)$ при $\alpha\geq 0$. Получим, что $x\to f_{xy}((x_0,y_0);x,y)$ сублинейная функция. Аналогично имеем, что $y\to f_{xy}((x_0,y_0);x,y)$ сублинейная функция. Лемма доказана.

Если f биположительно однородная функция и $(x,y)\in X\times Y$, то

$$f_{xy}((0,0);(x,y))=\sup_{u\in X,\upsilon\in Y}\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0,\mu\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda\mu}(f(\lambda u+\lambda x,\mu\upsilon+\mu y)-f(\lambda u+\lambda x,\mu\upsilon)-f(\lambda u,\mu\upsilon+\mu y)+$$

$$+f(\lambda u,\mu\upsilon))=\sup_{u\in X,\upsilon\in Y}(f(u+x,\upsilon+y)-f(u+x,\upsilon)-f(u,\upsilon+y)+f(u,\upsilon)).$$

Множество

$$d_{xy}f(x_0,y_0)=\{x^*\in B(X\times Y,R):f_{xy}((x_0,y_0);(x,y))\geq x^*(x,y)\ \text{при}\ (x,y)\in X\times Y\}$$

назовем частным бисубдифференциалом раздельно 2-липшицевых функций в точке (x_0,y_0).

Если $b:X\times Y\to R$ билинейная функция, то легко проверяется, что

$$b_{xy}((x_0,y_0);(x,y))=b(x,y)\ \text{при}\ (x,y)\in X\times Y.$$

Если $P:X\times Y\to R$ бисублинейная функция, то положим

$$\partial_2 P=\{x^*\in B(X\times Y,R):P(x,y))\geq x^*(x,y)\ \text{при}\ (x,y)\in X\times Y\}.$$

Следствие 3.1. Если $f:X\times Y\to R$ и $(x,y)\in X\times Y$, то

$$f^{\{2\}}((x_0,y_0);(x,0),(0,y))=f_{xy}((x_0,y_0);(x,y)).$$

Лемма 3.3. Если $P:X\times Y\to R$ бисублинейная функция, то $\partial_2 P\subset d_{xy}P(0,0)$.

Доказательство. Положив в определении $P_{xy}((0,0);(x,y))$, $(u,\upsilon)=(0,0)$ и $(u,\upsilon)=(-x,-y)$ соответственно имеем, что $P_{xy}((0,0);(x,y))\geq\max\{P(x,y),P(-x,-y)\}$.

Поэтому из определения $\partial_2 P$ и $d_{xy}P(0,0)$ вытекает, что $\partial_2 P\subset d_{xy}P(0,0)$.

Лемма доказана.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу. -Баку, Элм-1999. -135 с.
2. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. -Баку, Элм, 2002. -125с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. -М.: Наука, 1962. -895р.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, 1974. -479с.
5. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.-359 p.
6. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума высших порядков для негладких функций. //Изв. АН Азерб. ССР, сер.физ.-техн. и матем. наук.- 1989. -№6. -с.33-47.
7. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для трехмерных дифференциальных включений. -Баку, Препринт №1, 2012. -88р.