−It was proved that the minimum value of the constructed majorizing function coincide with the maximum value of the objective function of the corresponding continuous problem (1) - (3).

Acknowledgement

In conclusion, I express my sincere gratitude to my research supervisor prof. K.Sh. Mammadov for participating in the discussion and valuable advice.

References

1.Libura M., Integer programming problems with inexact objective function // Control And Cybernetics. −1980. − Vol. 9, № 4. −P.189-202.

2.Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П., Алгоритмы перебора L-классов для булевой задачи о рюкзаке с интервальными данными Материалы III Всероссий-ской конференции "Проблемы оптимизации и экономическое приложение" // Омск: Изд-во Ом ГТУ. −2006.−С. 87.

3.Emelichev V.A., Podkopaev D.P., Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimitation.− 2010.− № 7.− P.48-63.

4.Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О., Методы построения субоптимистического и субпессимистического решений частично-Булевой задачи о ранце с интервальными данными // Изв. НАН Азербайджана.− 2016.− № 6.− с.6-13.

5.Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г., Понятия субоптимистического и субпессимистичес-кого решений и построение их в интервальной задаче Булевого программирования // Радиоэлектроника, Информатика, Управление.− 2016.−№ 3.− с. 99-107.

6.Mamedov K.Sh., Mammadli N.O., Two methods for construction of suboptimistic and subpessimistic solutions of the interval problem of mixed Boolean programming // Radio Electronics, Computer Science, Control.−2018.− №3(46). DOI 10/15588/1607-3274-2018-3-7.

7.Bukhtoyarov S.E., Emelichev V.A., Stability aspects of Multicriteria integer linear programming problem // Journal of Applied and Industrial mathematics.− 2019.− V(13). −№1.− pp.1-10.

8.Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Инвестиционная булева задача с критериями рисков Севиджа в условиях неопределенности // Дискретная матем-ка.− 2019.− Т 31.− №2.− с.20-33.

9.Emelichev V.A., Kuzmin K.J., On the T – stability radious of a multicriteria linear Boolean problem with Helder norm in parameter spaces // Tavricheskiy Vestnik Math.inform.− 2016. 30 1.− pp.49-64.

10. Hladik M. On strong optimality of interval linear programming // Optim.Lett . —2017. —11(7).— P.1459-1468
https://doi: 10.1007/s11590-016-1088-3

11. Li W., Liu X., Li H., Generalized solutions to interval linear programs and related necessary and sufficient optimality conditions // Optim. Methods Softw . 2015.—30(3) . —P.516-530.

12. Mostafaee A., Hladik M., Cerny M. Inverse linear programming with interval coefficients // J.Comput. Appl.Math. —2016. —292:591-608.

13. К.Ш.Мамедов, Н.О.Мамедли, Методы построения приближённого решения интервальной задачи частично-целочисленного программирования // ЕСУ, 2019, № 4(61), с.29-36. DOI:10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.61.2.

ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ФЕРМИОНА С КАПЛЕЙ БОЗЕ-КОНДЕНСАТА

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.2.66.306

Мастропас Зинаида Петровна
канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры общей физики,
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

ON ENERGY OF A FERMION COUPLED WITH A DROP OF BOSE CONDENSATE

Mastropas Z.P.
candidate of physical and mathematical sciences,
associate Professor, Physics Department Chair,
Southern Federal University, Rostov-on-Don

АННОТАЦИЯ

Методами квантовой теории поля исследована система из одного реального фермиона, сильно взаимодействующего с векторным бозе-полем. Установлено, что основным состоянием такой системы в случае адиабатического приближения является состояние двух связанных волновых пакетов. Гармоники бозе-поля находятся в квантово-когерентных состояниях, а само бозе-поле содержит бозе-конденсат. Доказано, что бозе-конденсат, сопровождающий перемещение устойчивого адрона, является когерентной составляющей собственного поля адрона, а потенциал этого поля естественно оказывается потенциалом Юкавы.

ABSTRACT

This research carried out using quantum field theory methods investigates the system of one real fermion strongly interacting with vector bosonic field. It is shown that, in case of adiabatic approximation, the ground state of such system is a state of two coupled wave packets. The harmonics of Bose field turn out to be in quantum-coherent states, while bosonic field itself contains a Bose condensate. This study proves that Bose condensate

accompanying the movement of a stable hadron is a coherent component of hadron's own field, and the potential of such field is naturally a Yukava potential.

Ключевые слова: Фермион, бозон, бозе-конденсат, адрон, когерентные состояния, потенциал
Keywords: Fermion, boson, Bose condensate, hadron, coherent states, potential

Для рассмотрения различных систем с сильным взаимодействием в квантовой оптике и физике кристаллов успешно используется математический аппарат квантовой теории поля [1,2]. В частности, идея о квантово-когерентных состояниях, позволяющая вводить классические параметры для описания систем с сильным взаимодействием и прогнозирования развития таких систем, показывает энергетическую выгодность локализованного состояния нерелятивистского фермиона [5]. Метод квантово-когерентных состояний можно использовать и для одинокого релятивистского фермиона, сильно взаимодействующего с вакуумом бозе-поля. Локализованный фермион в состоянии типа волнового пакета связан с деформацией вакуума бозе-поля. В результате взаимодействия с бозе-полем фермион может передавать импульс бозонам, или получать его от них.

Эти процессы описывались нами для упрощенной модели, в которой кинетическая энергия движения фермиона внутри капли бозе-конденсата принимается значительно меньше его энергии покоя [3]. Потенциал $Z_0(\vec{r})$ оказывается независящей от времени функцией, которая должна удовлетворять упрощенному уравнению

$$(m^2 - \Delta_{\vec{r}})Z_0(\vec{r}) = a|\psi(\vec{r})|^2, \tag{1}$$

где $\Delta_{\vec{r}}$ - Лапласиан (в адиабатическом приближении в функцию $Z_0(\vec{r})$ независимо вносит свой вклад каждый бесконечно малый элемент распределения $|\psi(\vec{r})|^2$ фермиона); m - масса бозона; a - постоянная связи. Сферически симметричному распределению $|\psi(\vec{r}')|^2$ будет соответствовать сферически симметричное классическое поле $Z_0(\vec{r})$, которое описывает квантово-когерентную часть бозе-поля. Функция Грина $Z'(\vec{r}-\vec{r}')$ определяется как решение уравнения (1) с δ - образным источником в правой части [3]:

$$(m^2 - \Delta_{\vec{r}})Z'(\vec{r}-\vec{r}') = a\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{2}$$

После Фурье-преобразования

$$\tilde{Z}'(\vec{k}) = \frac{a}{m^2+\vec{k}^2} \tag{3}$$

функция Грина

$$Z'(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{a}{4\pi}\frac{exp\left(-m(\vec{r}-\vec{r}')\right)}{r}. \tag{4}$$

Функция (4) фактически является потенциалом Юкавы бозе-поля точечного источника.

Потенциал $Z_v'(\vec{r}-\vec{r}',t)$ для движущегося источника [4] показывает, что деформация вакуума бозе-поля всегда следует за источником, не совершая собственного движения. Таким образом, говоря о поле заряда, нужно помнить, что на самом деле это не его поле, а поле капли бозе-конденсата, связанной с зарядом.

Решение уравнения (1) может быть получено сверткой

$$Z_0(\vec{r}) = \int d\vec{r}' Z'(\vec{r}-\vec{r}')\left|\psi(\vec{r}')\right|^2 = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\tilde{Z}'(\vec{k})\phi(\vec{k})\, exp(i\vec{k}\vec{r}), \tag{5}$$

где

$$\phi(\vec{k}) = \int d\vec{r}\, exp(i\vec{k}\vec{r})\,|\psi(\vec{r})|^2. \tag{6}$$

Самой удобной пробной функцией $\psi(\vec{r})$, позволяющей практически до конца аналитически выполнить все расчеты, обладающей сферической симметрией и содержащей всего один параметр r_0, характеризующий степень локализации фермиона, оказалась функция

$$\psi(\vec{r}) = \left(1+\frac{r}{r_0}\right) exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)(7\pi r_0^3)^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

В импульсном представлении она также проста

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \int d\vec{r}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\psi(\vec{r})\, exp(-i\vec{k}\vec{r}) = \frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2r_0^3}{7}}\left(1+r_0^2\vec{k}^2\right)^{-3}, \tag{8}$$

как и Фурье-образ $\phi(\vec{k})$ функции $|\psi(\vec{r})|^2$

$$\phi(\vec{k}) = \frac{64}{7}\frac{(28+r_0^2\vec{k}^2)}{(4+r_0^2\vec{k}^2)^4}. \qquad (9)$$

В состоянии с волновой функцией (7) среднее значение Гамильтониана фермиона будет иметь вид

$$\langle H_0\rangle = \int_0^\infty 4\pi k^2 dk 64\,\pi^{-2}\frac{2r_0^2}{7}\sqrt{M^2+\vec{k}^2}\left(1+r_0^2\vec{k}^2\right)^{-6}. \qquad (10)$$

В выражении (10) должно быть учтено, что мы предполагали малость кинетической энергии k^2 по сравнению с энергией покоя M в релятивистской области, т.е. $Mr_0 >> kr_0$. Это значит, что верхний предел интегрирования в (10) должен быть не выше M. Подынтегральное выражение в (10) очень быстро убывает при $kr_0 > 1$, поэтому, если $Mr_0 > 1$, то верхний предел интегрирования можно продлить до бесконечности, не изменив существенно значения интеграла. Как показывают оценки, интеграл в (10) можно использовать уже при $Mr_0 \geq 2$.Среднее значение Гамильтониана взаимодействия можно получить, представляя последний член в выражении (2) в виде

$$\langle H_i\rangle = \int a|\psi(\vec{r})|^2 Z_0(\vec{r})d\vec{r}. \qquad (11)$$

После подстановки в (11) $\phi(\vec{r})$ и $Z_0(\vec{r})$ оказывается, что в среднем

$$\langle H_i\rangle = -a^2\int\frac{4\pi k^2 dk\phi^2(\vec{k})}{(2\pi)^3(k^2+m^2)}. \qquad (12)$$

Среднее значение Гамильтониана $\langle H_z\rangle$ свободного бозе-поля удовлетворяет равенству

$$\langle H_z\rangle = -\frac{1}{2}\langle H_i\rangle. \qquad (13)$$

Таким образом, исследуя на экстремум среднее значение Гамильтониана системы $H = H_0 + H_z + H_i$ по параметру локализации r_0, можно оценить выгодность или невыгодность локализации фермиона в бозе-вакууме, а также обсудить влияние параметров a, M и m на энергию «одетого» фермиона и степень его локализации. Вводя новую переменную интегрирования $x = kr_0$ и обозначения $y = m * r_0$, $b = \frac{M}{m}$, из (10), (12) и (13) получим:

$$\langle H\rangle = \int_0^\infty x^2 dx\left[\frac{512}{7\pi y}\frac{\sqrt{b^2y^2+x^2}}{(1+x^2)^6} - \frac{a}{\pi^2 y}\frac{1024(28+x^2)^2}{49(4+x^2)^8(x^2+y^2)^2}\right]. \qquad (14)$$

Дифференцируя $\langle H\rangle$ по r_0, получим условие минимума $\langle H\rangle$:

$$\frac{2a^2}{7\pi}\int_0^\infty\frac{x^2(28+x^2)^2(x^2+3y^2)dx}{(x^2+y^2)^2(4+x^2)^8} - \int_0^\infty\frac{x^4dx}{\sqrt{b^2y^2+x^2}(1+x^2)^6} = 0 \qquad (15)$$

Условие (15) позволяет, задав в нем b и y, найти соответствующие значения a, при котором оно выполняется, численным интегрированием определить $\langle H\rangle 0_{min}$ и установить зависимости от константы связи величин $M_0(a,b)$ и $y(a,b)$ при различных значениях b. Эти зависимости показывают, что чем больше отношение массы затравочного фермиона M к массе бозона m, тем при меньших значениях константы связи (рассматривалась область $0{,}5 \div 6$) становится выгодной локализация фермиона. Дефект массы фермиона $\Delta M = M - M_0$, быстро растет с увеличением константы связи в указанной области и может достигать величины, близкой к M. Параметр локализации r_0 в рассмотренных локализованных состояниях фермиона по порядку величины равен m^{-1}. Это указывает на то, что энергия деформации вакуума гармоники бозе-поля с волновым вектором $\vec{q} \approx r_0^{-1}$ будет иметь величину $\sqrt{m^2+\vec{q}^2} \approx \sqrt{2m^2}$ и, следовательно, перестройка в состояние с реальными бозонами капли конденсата будет происходить в среднем за время порядка m^{-1}. Так как $y = mr_0$ порядка 1, следовательно, неопределенность импульса фермиона порядка m. Поэтому в таких состояниях, как мы и предполагали, при $M >> m$ движением фермиона по зарядовой переменной можно пренебречь.

Напомним также, что согласно (13) средняя энергия $C \equiv \langle H_z\rangle$ деформации вакуума бозе-поля в локализованном состоянии всегда в 2 раза меньше модуля отрицательной энергии ее взаимодействия с фермионом. Следовательно, существуют соотношения

$$M_0 = M + C + U + T; -U - T = M - M_0 + C. \qquad (16)$$

Они содержат среднюю кинетическую энергию T фермиона как и в случае обычной связи для систем частиц, и отличаются от нее наличием величины C. Таким образом, выигрыш энергии (энергия связи) $-U-T$ в результате локализации покрывает (16) затраты на создание бозе-конденсата (C) и включает часть $(M-M_0)$ энергии покоя затравочного адрона. Освобождающаяся энергия покоя адрона может пойти только на излучение реальных бозонов в процессе формирования бозе-конденсата. В соответствии с (13) соотношение (16) можно представить в виде

$$M_0 = M + \frac{1}{2}U + T. \quad (17)$$

Следовательно, энергия $M-M_0$ излученных реальных бозонов будет несколько меньше энергии $C=-\frac{1}{2}U$ за счет кинетической энергии движения адрона в поле деформации бозе-вакуума. При больших дефектах масс $M-M_0 \approx M$ и в условиях $T << M$

$\frac{\mathrm{C}}{m} \approx \frac{M}{m} = b \approx -\frac{U}{2m}$, (18) т.е. среднее число b реальных бозонов, возникающих при распаде бозе-конденсата, примерно равно числу излученных реальных бозонов при распаде «антикапли» бозе-конденсата за счет освобождающейся энергии покоя адрона.

Таким образом, затравочный фермион на фоне недеформированного бозе-вакуума в случае сильного взаимодействия совершенно неустойчив. Например, затравочный адрон, появившийся в результате некоторой быстрой реакции (протекающей за время, меньшее характерного времени m^{-1} для бозе-систем) в течение времени m^{-1} деформирует вакуум бозе-поля и излучит в среднем $b=\frac{M}{m}$ реальных бозонов. Число таких реальных бозонов может достигать многих сотен единиц, значит рассматриваемый процесс локализации адрона является процессом излучения множества бозонов в одном акте распада «антикапли». Это характерный признак существования бозе-конденсата в системах с сильным взаимодействием фермиона с бозе-полем. Такие процессы создают видимость процессов распада некоторой частицы, а в действительности это процесс появления деформационной оболочки у заряженного фермиона. Связанный с фермионом бозе-конденсат проявляет себя как собственное поле фермиона, порождаемое его зарядом (подобно кулоновскому полю электрона или протона), фактически являясь динамической подсистемой этого заряда, которая может быть от него отделена. Поскольку, как показано выше, взаимодействие заряда с собственным его полем понижает энергию и массу заряда, то, в отсутствие собственного поля, заряд находится в возбужденном состоянии, а окруженный таким полем – зарядом в основном состоянии. Таким образом, всякий заряд может находиться в двух состояниях, отличающихся по массе.

ЛИТЕРАТУРА

1.Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М., 1970.

2. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. М., 1974.

3.Мастропас З.П. Капельная модель фермиона. // Проблемы и перспективы развития науки в России и мире. - Уфа. - 2016. - С. 13-16.

4.Мастропас З.П. О скорости движения заряженного фермиона. //Научные исследования и разработки. - М. - ЕНО. - 2017. - Т.1, №11(33). - С. 13-17.

5.Myasnikov E. N., Myasnikova A. E., Kusmartsev F. V. // Phys. Rev. 2005, vol.72, pp. 224303-13.