НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА В АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет

АННОТАЦИЯ.

В работе в нерегулярном случае установлены необходимые условия экстремума для негладких экстремальных задач при наличии ограни-чений в счетно-банаховом пространстве. Определены $\varphi-(o(\beta),\delta)$ локально липшицевые отображения в точке и используя класс $\varphi-(o(\beta),\delta)$ локально липшицевых отображений в точке, получены необходимые условия экстремума при наличии ограничений.

ABSTRACT.

In the irregular case the necessary extremum conditions are obtained for nonsmooth extremal problems with constraints in a countable Banach space. $\varphi-(o(\beta),\delta)$ locally Lipschitz mappings at a point are defined and using the classes $\varphi-(o(\beta),\delta)$ locally Lipschitz mappings at a point, necessary conditions of the extremum are received for extreme problems in the presence of restrictions.

Ключевые слова: сублинейная функция, липшицевая функция, отоб-ражение, локальный минимум.

Key words: sublinear function, Lipschitz function, map, local minimum.

1. Вспомагательные результаты

В работе [1] и [2], используя классы $\varphi-(o(\beta),\delta)$ и $S-(o(\beta),\delta)$ локально липшицевых отображений в точке, получены необходимые условия экстре-мума при наличии ограничений. В данной работе аналогичная методика применяется к нерегульярной задаче математического программирования.

Пусть X и Y отделимые локально выпуклые пространства, $C\subset X$.

Пусть $x_0\in C$. Касательным конусом к C в точке x_0 называется множество, состоящее из всех векторов $\upsilon\in X$ таких, что для каждой окрестности V вектора υ в X найдутся окрестность U точки x_0 в X и число $\varepsilon>0$ такие, что $(x+tV)\bigcap C\neq\varnothing$ при $x\in U\bigcap C$ и $t\in(0,\varepsilon)$ [3]. Касательный конус к множеству C в точке $x_0\in C$ обозначается через $T_C(x_0)$.

Отметим, что $T_C(x_0)=\liminf\limits_{x\to_C x_0,\, t\downarrow 0}\frac{1}{t}(C-x)$, где $x\to_C x_0 \Leftrightarrow x\to x_0$ и $x\in C$.

Положим $N_C(x_0)=T_C(x_0)^-=\{p\in X^*:\langle p,x\rangle\le 0$ при $x\in T_C(x_0)\}$.

Пусть $C\subset X$, $x_0\in C$. Вектор $\upsilon\in X$ называется гиперкасательной к множес-тву C в точке $x_0\in C$, если найдутся окрестность U точки x_0, окрестность V вектора υ и число $\varepsilon>0$ такие, что $U\bigcap C+(0,\varepsilon)V\subset C$. Множество всех гиперка-сательных к множеству C в точке $x_0\in C$ обозначается через $I_C(x_0)$ [3, с.267].

Если $I_C(x_0)$ непусто, то из следствия 4.2[3] следует, что $T_C(x_0)=\mathrm{cl}\, I_C(x_0)$.

Пусть X-банахово пространство. Если $C\subset X$ выпуклое множество, то $T_C(x_0)=\mathrm{cl}\bigcup\limits_{\lambda>0}\frac{C-x_0}{\lambda}$ [4, с.167]. Если $C\subset X$ выпуклое множество, $\mathrm{int}\, C\neq\varnothing$ и $x_0\in C$, то из предложения 4.1.7[4, с.170] имеем, что $\mathrm{int}\, T_C(x_0)=\bigcup\limits_{\lambda>0}\frac{\mathrm{int}\, C-x_0}{\lambda}$. Кроме того из леммы (см. [5], с.95) следует, что $I_C(x_0)$ непусто. Тогда из теоремы 2.4.8[5, с.59] следует, что $\mathrm{int}\, T_C(x_0)=I_C(x_0)$.

Теорема 1.1[6]. Если X и Y пространства Фреше, $C\subset X$ выпуклое множество и $\mathrm{int}\, C\neq\varnothing$, $f_i:C\to R$, $i=1,\dots,k$, выпуклые непрерывные функции, $\Lambda:X\to Y$ непрерывный линейный оператор, $Ax=\Lambda x+\bar{y}$, $\bar{y}\in Y$, Im Λ=Y и система $f_i(x)<0$, $i=1,\dots,k$, $Ax=0$

не имеет решения в C, то существуют числа $\lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_k\ge 0$ и вектор $y^*\in Y^*$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\langle y^*,Ax\rangle\ge 0$ при $x\in C$.

Теорема 1.2[6]. Пусть X линейное пространство, $C \subset X$ выпуклое множество, $C \neq \varnothing$, $f_i : C \to R,\ i = 1,\ldots,k,$ выпуклые функции и система $f_i(x) < 0, \quad i = 1,\ldots,k$,

не имеет решения в C. Тогда существуют числа $\lambda_1 \geq 0,\ldots,\lambda_k \geq 0$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) \geq 0$ при всех $x \in C$.

2. Необходимое условие в терминах верхней аппроксимации

Пусть X и Y - счетно-банаховы пространства топологии, которых задаются семейством направленных норм $\{x \to \|x\|_i\}_{i\in N}, \{y \to \|y\|_j\}_{j\in N}$ соответственно, $\|x\|_k \in \{\|\cdot\|_i\}_{i\in N}$, $\|y\|_s \in \{\|\cdot\|_j\}_{j\in N}$ [7, с.211]. Через X_k обозначим пространство X с нормой $\|x\|_k$, а через Y_s обозначим пространство Y с нормой $\|y\|_s$.

Пусть $f_i : X \to R,\ i \in I = \{0,1,\ldots,m\}$, $F : X \to Y$, $C \subset X$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \to \min,\ z \in P = \{x \in X : f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\ldots,m,\ F(x) = 0,\ x \in C\} \quad (2.1)$$

Точка $x_0 \in P$ называется точкой локального минимума f_0 на P, если существует окрестность U точки x_0 такое, что $f_0(x_0) \leq f_0(x)$ при $x \in P \bigcap U$.

Если x_0 -точка локального минимума в задаче (2.1), то существует X_k такое, что x_0 -является точкой локального минимума в задаче (2.1) относительно X_k. Также считаем, что пространство Y_s такое, что отображение $F : X_k \to Y_s$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0.

Положим $B_k(0,\delta) = \{x \in X : \|x\|_k \leq \delta\}$.

Если существует функция $o : R_+ \to R_+$, где $\lim_{t\downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $o(0) = 0$ такая, что $f(\overline{x} + x) - f(\overline{x}) - \varphi(x) \leq o(\|x\|_k^{\beta})$ при $x \in B_k(0,\delta)$, то функцию f назовем $\varphi - (o(\beta),\delta)$ локально верхней полулипшицевой в точке $\overline{x}$ относительно $\|x\|_k$.

Пусть $I_C(x_0)$ ($T_C(x_0)$) множество всех гиперкасательных (касательных) к множеству C в точке $x_0 \in C$ относительно X_k.

Положим $N_C(x_0) = T_C^-(x_0) = \{p \in X_k^* :\ \langle p, x\rangle \leq 0 \text{ при } x \in T_C(x_0)\}$.

Пусть U окрестность точки x_0 в X_k, отображение $F : U \to Y_s$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0. Пологая [8, с.64], что $P -$проектор на некоторое прямое дополнение $\operatorname{Im} F'(x_0) = F'(x_0)X$ в Y_s, введем семейство линейных операторов $\psi_2(P,h) : X \to Y$, $\psi_2(P,h) = F'(x_0) + PF''(x_0)(h,\cdot)$, где $h \in X$ и конус $T_2 = \{h \in \operatorname{Ker} F'(x_0) : F''(x_0)(h,h) \in \operatorname{Im} F'(x_0)\}$.

Отображение F называется 2-регулярным в точке x_0 на елементе $h \in X$, если $\operatorname{Im} \psi_2(P,h) = Y$. Отображение F называется 2-регулярным в точке x_0, если оно 2-регулярно в этой точке на любом элементе $h \in T_2 \setminus \{0\}$ [8, с.64].

Замечание 2.1. Пусть отображение $F : U \to Y_s$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0. Подпространство $\operatorname{Im} F'(x_0)$ замкнуто. Положим $V = \operatorname{Im} F'(x_0) \times (Y / \operatorname{Im} F'(x_0))$. Пусть $\pi : Y \to (Y / \operatorname{Im} F'(x_0))$ фактор отображение. Для каждого $h \in X$ рассмотрим отображение $G(x_0,h) : X \to V$, определенное по фор-муле $G(x_0,h)x = (F'(x_0)x, \pi F''(x_0)(h,x))$. Если $\operatorname{Im} G(x_0,h) = V$, то отображение F назы-вается регулярным в точке x_0 на елементе $h \in X$ [9, с.32].

Отметим, что равенство $\operatorname{Im} F'(x_0) + F''(x_0)(h, \operatorname{Ker} F'(x_0)) = Y$ также является условием 2- регулярности отображения F в точке x_0 на елементе $h \in X$ и эквивалентно введенному понятию регулярности отображения F в точке x_0 на елементе $h \in X$.

Пусть $\widetilde{T}_2 = \{h \in X : F''(x_0)(h,h) \in \operatorname{Im} F'(x_0), \operatorname{Im} \psi_2(P,h) = Y\} \bigcup \{0\}$

(или $\widetilde{T}_2 \subset \{h \in X : F''(x_0)(h,h) \in \operatorname{Im} F'(x_0),\ \operatorname{Im} \psi_2(P,h) = Y\} \bigcup \{0\}$, или

$$\widetilde{T}_2 \subset \{h \in X : F''(x_0)(h,h) \in \operatorname{Im} F'(x_0), \operatorname{Im} G(x_0,h) = V\} \bigcup \{0\}).$$

Замыкание $\operatorname{Lin} \widetilde{T}_2$ в X_k обозначим через $\overline{\operatorname{Lin}}\ \widetilde{T}_2$. Совокупность относи-тельно внутренних точек множества $\widetilde{T}_2$ в $\overline{\operatorname{Lin}}\ \widetilde{T}_2$ обозначается через $\operatorname{ri} \widetilde{T}_2$.

Положим $\overline{T}_2 = \operatorname{cl} \widetilde{T}_2,\ T = T_C(x_0) \bigcap \overline{T}_2,\ Z = \operatorname{Im} F'(x_0) = F'(x_0)X$.

Теорема 2.1. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.1) относительно X_k, в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0, где $i \in I,\ \varphi_i : X_k \to R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I,\ f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, отображение $F : X_k \to Y_s$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0, $Z = \operatorname{Im} F'(x_0)$ замкнуто и топологически дополняемо в Y_s, $\widetilde{T}_2$ выпуклый конус, $C \subset X$, $I_C(x_0) \bigcap \operatorname{ri} \widetilde{T}_2 \neq \varnothing$ и $F'(x_0)(\overline{\operatorname{Lin}}\ \widetilde{T}_2) = \operatorname{Im} F'(x_0)$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0,\ \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ и $z^* \in Z_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) + \langle z^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T$, где $T = T_C(x_0) \bigcap \overline{T}_2$.

Доказательство. Обозначим $\Lambda = F'(x_0)$. Покажем, что система

$$\varphi_0(x) < 0,\ \varphi_1(x) < 0,\ \ldots,\ \varphi_m(x) < 0,\ \Lambda x = 0$$

не имеет решение на $I_C(x_0) \bigcap \widetilde{T}_2$. Предположим противное. Пусть существует $\overline{x} \in I_C(x_0) \bigcap \widetilde{T}_2$ такая, что $\varphi_i(\overline{x}) < 0$ при $i \in I$ и $\Lambda \overline{x} = 0$. Так как $\Lambda \overline{x} = 0$ и $\overline{x} \in \widetilde{T}_2$, то по теореме 4[8, с.65] (или по теореме о поправке[9,с.32]) существует $\varepsilon > 0$ и отображение $r : [0, \varepsilon] \to X$ такие, что $\frac{r(t)}{t} \to 0$ при $t \downarrow 0$ и $F(x_0 + t\overline{x} + r(t)) = 0$ при $t \in [0, \varepsilon]$. По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0, где $i \in I$. Тогда $f_i(x_0 + t\overline{x} + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i(t\overline{x} + r(t)) \leq o(\|t\overline{x} + r(t)\|_k)$ при $t \in [0, \varepsilon],\ \|t\overline{x} + r(t)\|_k \leq \delta,\ i \in I$.

Так как φ_i непрерывная функция, то существует $0 < \delta_0 \leq \frac{1}{2}\delta$ такое, что $\left|\varphi_i(\overline{x} + \frac{r(t)}{t}) - \varphi_i(\overline{x})\right| \leq \frac{1}{2}\left|\varphi_i(\overline{x})\right|$ при $\left\|\frac{r(t)}{t}\right\|_k \leq \delta_0$ и $i \in I$. Тогда получим, что $\varphi_i(\overline{x} + \frac{r(t)}{t}) \leq \frac{1}{2}\varphi_i(\overline{x})$ при $\left\|\frac{r(t)}{t}\right\|_k \leq \delta_0$ и $i \in I$. Так как $\frac{r(t)}{t} \to 0$ при $t \downarrow 0$, то существует λ, где $0 < \lambda < 1$, такое, что $\left\|\frac{r(t)}{t}\right\|_k \leq \delta_0$ при $t \in (0, \lambda]$. Тогда $\|t\overline{x} + r(t)\|_k \leq \delta$ при $t \in [0, \lambda_1]$, где $\lambda_1 = \min\{\lambda, \frac{1}{2\|\overline{x}\|_k}\delta, \varepsilon\}$.

Поэтому имеем, что

$$f_i(x_0 + t\overline{x} + r(t)) - f_i(x_0) \leq 0{,}5\ t\varphi_i(\overline{x}) + o(t\|\overline{x} + \tfrac{1}{t}r(t)\|) \leq 0{,}5\ t\varphi_i(\overline{x}) + o(t\|\overline{x} + \tfrac{1}{t}r(t)\|_k)\frac{t\|\overline{x} + \delta_0\|_k}{t\|\overline{x} + \frac{1}{t}r(t)\|_k}$$

при $t \in [0, \lambda_1]$ и $i \in I$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что

$$f_0(x_0 + t\overline{x} + r(t)) - f_0(x_0) < 0,\ f_j(x_0 + t\overline{x} + r(t)) < 0,\ j \in J,$$
$$F(x_0 + t\overline{x} + r(t)) = 0$$

при $t \in (0, \lambda_2]$. Если $\overline{x} \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + t\overline{x} + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0(x)<0$, $\varphi_1(x)<0$, …, $\varphi_m(x)<0$, $\Lambda x=0$ не имеет решение на $I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2$. Если в теореме 1.1 заменить X через $\overline{\mathrm{Lin}}\,\tilde{T}_2$, Y через Z_s^*, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0\ge 0,\ \alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_m\ge 0$ и $z^*\in Z_s^*$ такие, что $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)+\left\langle z^*,F'(x_0)x\right\rangle\ge 0$ при $x\in I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2$ Так как $\varphi_i:X\to R$ непрерывные функции при $i\in I$ и $\Lambda=F'(x_0)$ линейный непрерывный оператор, то имеем, что $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)+\left\langle z^*,F'(x_0)x\right\rangle\ge 0$ при $x\in T=\mathrm{cl}(I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2)$ относительно X_k.

Так $I_C(x_0)\bigcap \mathrm{ri}\,\tilde{T}_2\ne\varnothing$, то по теореме 2.4.8[5,с.59] имеем, что $T=T_C(x_0)\bigcap\overline{T}_2=\mathrm{cl}(I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2)$. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Если X и Y конечномерные пространства, $C\subset X$ выпуклое множество $f_i:C\to R,\ i=1,\ldots,k,$ выпуклые непрерывные функции, $\Lambda:X\to Y$ непрерывный линейный оператор, то теорема 1.1 (теорема Фана) также верна. Поэтому, если X и Y конечномерные пространства, то теорема 2.1 верна без условия $F'(x_0)(\overline{\mathrm{Lin}}\,\tilde{T}_2)=\mathrm{Im}\,F'(x_0)$.

Если $F''(x_0)(h_1,h_2)\in\mathrm{Im}\,F'(x_0)$ при $h_1,h_2\in\tilde{T}_2$, то легко проверяется, что $\tilde{T}_2$ выпуклое множество.

Замечание 2.3. Из доказательства теоремы 2.1 имеем, что $\max\limits_{0\le i\le m}\varphi_i(x)\ge 0$ при $x\in I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2\bigcap\mathrm{Ker}\,\Lambda.$ Если $I_C(x_0)\bigcap \mathrm{ri}\,\tilde{T}_2\bigcap\mathrm{Ker}\,\Lambda\ne\varnothing,$ то отсюда следует, что $\max\limits_{0\le i\le m}\varphi_i(x)\ge 0$ при $x\in T\bigcap\mathrm{Ker}\,\Lambda.$

Если в теореме 2.1 выпуклость множества $\tilde{T}_2$ заменить на выпуклость множества $I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0\ge 0,\ \ \alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_m\ge 0$ и $z^*\in Z_s{}^*$ такие, что $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)+\left\langle z^*,F'(x_0)x\right\rangle\ge 0$ при $x\in\mathrm{cl}(I_C(x_0)\bigcap\tilde{T}_2).$

Положим $T_0=\{h\in\mathrm{Ker}\,F'(x_0):F''(x_0)(h,h)\in\mathrm{Im}\,F'(x_0),\ \mathrm{Im}\,G(x_0,h)=V\}\bigcup\{0\}$ (или $T_0\subset\{h\in\mathrm{Ker}\,F'(x_0):F''(x_0)(h,h)\in\mathrm{Im}\,F'(x_0),\ \mathrm{Im}\,G(x_0,h)=V\}\bigcup\{0\}$, или

$T_0\subset\{h\in\mathrm{Ker}\,F'(x_0):F''(x_0)(h,h)\in\mathrm{Im}\,F'(x_0),\ \ \mathrm{Im}\,\psi_2(P,h)=Y\}\bigcup\{0\}.$)

Теорема 2.2. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.1) относительно X_k, в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i-(o(1),\delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0, где $i\in I,$ $\varphi_i:X_k\to R$ сублинейные непрерывные функции при $i\in I,$ $f_j(x_0)=0$ при $j\in J,$ отображение $F:X_k\to Y_s$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0, $\mathrm{Im}\,F'(x_0)$ замкнуто и топологически дополняемо в Y_s, T_0 выпуклый конус (либо $I_C(x_0)\bigcap T_0$ выпуклый конус), $C\subset X$, $I_C(x_0)\bigcap T_0\ne\varnothing,$ то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0\ge 0,\ \alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_m\ge 0$ такие, что $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)\ge 0$ при $x\in\mathrm{cl}(I_C(x_0)\bigcap T_0).$

Доказательство. Обозначим $\Lambda=F'(x_0)$. Покажем, что система $\varphi_0(x)<0$, $\varphi_1(x)<0$, …, $\varphi_m(x)<0$ не имеет решение на $I_C(x_0)\bigcap T_0$. Предположим противное. Пусть существует $\bar{x}\in I_C(x_0)\bigcap T_0$ такая, что $\varphi_i(\bar{x})<0$ при $i\in I.$ Так как $\bar{x}\in T_0$, то по теореме о поправке[9, с.32] (или по теореме 4[8, с.65]) существует $\varepsilon>0$ и отображение $r:[0,\varepsilon]\to X$ такие, что $\frac{r(t)}{t}\to 0$ при $t\downarrow 0$ и $F(x_0+t\bar{x}+r(t))=0$ при $t\in[0,\varepsilon].$

По условию функция f_i удовлетворяет $\varphi_i-(o(1),\delta)$ локально верхней полу-липшицеву условию в точке x_0, где $i\in I$. Тогда $f_i(x_0+t\bar{x}+r(t))-f_i(x_0)-\varphi_i(t\bar{x}+r(t))\le o(\|t\bar{x}+r(t)\|_k)$ при $t\in[0,\varepsilon],$

$\|t\bar{x}+r(t)\|_k \le \delta$, $i \in I$. Так как φ_i непрерывная функция, то существует $0<\delta_0 \le \frac{1}{2}\delta$ такое, что $\left|\varphi_i(\bar{x}+\frac{r(t)}{t})-\varphi_i(\bar{x})\right| \le \frac{1}{2}\left|\varphi_i(\bar{x})\right|$ при $\left\|\frac{r(t)}{t}\right\|_k \le \delta_0$ и $i \in I$. Тогда получим, что $\varphi_i(\bar{x}+\frac{r(t)}{t}) \le \frac{1}{2}\varphi_i(\bar{x})$ при $\left\|\frac{r(t)}{t}\right\|_k \le \delta_0$ и $i \in I$. Так как $\frac{r(t)}{t} \to 0$ при $t \downarrow 0$, то существует λ, где $0<\lambda<1$, такое, что $\left\|\frac{r(t)}{t}\right\|_k \le \delta_0$ при $t \in (0,\lambda]$. Тогда $\|t\bar{x}+r(t)\|_k \le \delta$ при $t \in [0,\lambda_1]$,

где $\lambda_1 = \min\{\lambda, \frac{1}{2\|\bar{x}\|_k}\delta, \varepsilon\}$. Поэтому имеем, что

$$f_i(x_0+t\bar{x}+r(t))-f_i(x_0) \le 0{,}5\ t\varphi_i(\bar{x})+o(t\|\bar{x}+\tfrac{1}{t}r(t)\|_k) \le 0{,}5\ t\varphi_i(\bar{x})+o(t\|\bar{x}+\tfrac{1}{t}r(t)\|_k)\frac{t\|\bar{x}+\delta_0\|_k}{t\|\bar{x}+\frac{1}{t}r(t)\|_k}$$

при $t \in [0,\lambda_1]$ и $i \in I$. Следовательно, существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что

$$f_0(x_0+t\bar{x}+r(t))-f_0(x_0)<0,\ f_j(x_0+t\bar{x}+r(t))<0,\ j \in J,\ F(x_0+t\bar{x}+r(t))=0$$

при $t \in (0,\lambda_2]$.

Так как $\bar{x} \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0+t\bar{x}+r(t) \in C$ при $t \in [0,\alpha_0]$.

Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2.1), то получим противоречие. Поэтому система $\varphi_0(x)<0$, $\varphi_1(x)<0$, …, $\varphi_m(x)<0$ не имеет решение на $I_C(x_0)\bigcap T_0$. По теореме 1.2 существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \ge 0, \alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_m \ge 0$ такие, что $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x) \ge 0$ при $x \in I_C(x_0)\bigcap T_0$. Так как $\varphi_i : X \to R$ непрерывные функции при $i \in I$, то по теореме 2.4.8[5, с.59] имеем, что $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x) \ge 0$ при $x \in cl(I_C(x_0)\bigcap T_0)$. Теорема доказана.

Отметим, что если $I_C(x_0)\bigcap ri\,T_0 \ne \varnothing$ и T_0 выпуклое множество, то $cl(I_C(x_0)\bigcap T_0) = T_C(x_0)\bigcap cl\,T_0$, где $ri\,T_0$ внутренность множества T_0 относительно $\overline{Lin}\ T_0$, а $\overline{Lin}\ \tilde{T}_0$ замыкание $Lin\,\tilde{T}_0$ в X_k.

Замечание 2.4. Из доказательства теоремы 2.2 имеем, что $\max_{0\le i\le m}\varphi_i(x) \ge 0$ при $x \in I_C(x_0)\bigcap T_0$. Если $I_C(x_0)\bigcap ri\,T_0 \ne \varnothing$, то отсюда следует, что $\max_{0\le i\le m}\varphi_i(x) \ge 0$ при $x \in T_C(x_0)\bigcap cl\,T_0$.

Положим $T_2 = \{h \in Ker\,F'(x_0) : F''(x_0)(h,h) \in Im\,F'(x_0)\}$. Пусть $ri\,T_2$ внутренность множества T_2 относительно $\overline{Lin}\ T_2$, а $\overline{Lin}\ T_2$ замыкание $Lin\ T_2$ в X_k.

Следствие 2.1. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.1) относительно X_k, в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i-(o(1),\delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0, где $i \in I$, $\varphi_i : X_k \to R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0)=0$ при $j \in J$, отображение F 2-регулярно в точке x_0 и T_2 выпуклый конус, $C \subset X$, $I_C(x_0)\bigcap ri\ T_2 \ne \varnothing$ относительно X_k, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \ge 0$, $\alpha_1 \ge 0,\ldots,\alpha_m \ge 0$ такие, что $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x) \ge 0$ при $x \in T_C(x_0)\bigcap cl\,T_2$.

Теорема 2.3[10]. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.1) относительно X_k, в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i-(o(1),\delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0, где $i \in I$, $\varphi_i : X_k \to R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0)=0$ при $j \in J$, оператор $F : X_k \to Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0, $F'(x_0)X=Y$,

$C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \varnothing$ относительно X_k, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0,\ \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Следствие 2.2. Если X и Y счетно-банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2.1) относительно X_k, в X_k функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o(1), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0, где $i \in I$, $\varphi_i : X_k \to R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_j(x_0) = 0$ при $j \in J$, оператор $F : X_k \to Y_s$ строго дифференцируем в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, C выпуклое множество, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$ относительно X_k, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0,\ \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y_s^*$ такие, что $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Справедливость следствия 2.2 следует из теоремы 2.3.

Из теоремы 2.3 и следствия 2.2 имеем, что точка нуль минимизирует выпуклую функцию $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x)$ в X. Поэтому получим

$$0 \in \partial\Big(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x)\Big)_{x=0} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \partial\varphi_i(0) + F'(x_0)^* y^* + N_C(x_0).$$

Замечание 2.5. Из доказательства теоремы 2.3 имеем, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in I_C(x_0) \bigcap \operatorname{Ker} F'(x_0)$. Поэтому если $\operatorname{int} T_C(x_0) \bigcap \operatorname{Ker} F'(x_0) \neq \varnothing$, то отсюда следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0) \bigcap \operatorname{Ker} F'(x_0)$.

Если $F : X_k \to Y_s$ регулярное отображение, т.е. $F : X_k \to Y_s$ строго дифференцируемо в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, то теорема 2.1 совпадает с теоремой 2.3.

Отметим, что все теоремы остаются верными, если в частности X и Y банаховы пространства.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку. Элм, 1996.- 148 с.

2. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutsch- land, LAP LAMBERT Academic Publishing. 2014.-359 p.

3. Rockafellar R.T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions.// Canad.J. Math.-1980. №2 (32).-P.257-280.

4. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. -М.: Мир, 1988. - 510 с.

5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. -М.: Наука, 1988.-280 с.

6. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14).-С.44-55.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1989.-623 с.

8. Измаилов А.Ф. Теоремы о представлении свойств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции. //Математические заметки.-2000.- т.67, вып.1.- С.57-68.

9. Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений. //Успехи математических наук. - 2013.- т.68, вып.3(411).- С.5-38.

10. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума первого и второго порядков в локально выпуклом пространстве. //East European Scientific Journal.-2019.- 3(43), p.1.-С.53-67.