

4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Минск: Беларуская навука, 1997.
5. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. – 2002. Т. 71, Вып. 1. – С. 43–60.
6. Ведерников В.А. О новых типах Ω -веерных формаций конечных групп // Украинський математичний конгресс – 2001. Секція 1. Праці. Київ. – 2002. – С. 36–45.
7. Корпачева М.А., Сорокина М.М. О критических Ω -веерных формациях конечных групп // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 1. – С. 87–94.
8. Сорокина М.М., Котлярова М.В. Ω -центральные формации конечных групп // Вестник Брянского государственного университета. 2004. № 3. – С. 112–115.
9. Сорокина М.М., Петрушин П.В., Макухин Р.А. О τ -замкнутых n -кратно Ω -центральных и n -кратно Ω -композиционных формациях конечных групп // Международный периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», II(4) Issue 32. – Бу-дапешт, 2014. – С. 48–51.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ.

Джалилова Рахима Курбановна

*Доктор философии по физико-математическим наукам, доцент,
педагог кафедры "Вычислительной математики и информатики"
Азербайджанского Государственного Педагогического Университета, г. Баку*

DOI: [10.31618/ESU.2413-9335.2019.3.63.171](https://doi.org/10.31618/ESU.2413-9335.2019.3.63.171)

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF FILTRATION OF GAS-LIQUID MIXTURE.

Jalilova Rahima Qurbanovna

*PhD in Physical and Mathematical Sciences, dosent, the teacher of the
Department of "Computational Mathematics and Informatics" of the
Azerbaijan State Pedagogical University, Baku*

АННОТАЦИЯ

В статье построена модель фильтрационного течения газожидкостной смеси, в которой газовая фаза представлена отдельными пузырьками малого размера, диспергированными в жидкости. Наличие газовой фазы оказывается на уравнении состояния, связывающем плотность с давлением. Используя методы нелинейной волновой динамики, для движения , отвечающих бегущей в одну сторону волне, получена система уравнений с нелинейностью, диссипатией и дисперсией. Ищется решение в виде квазипростой волны, т.е. отличающейся от простой волны членами старшего порядка, малости. Для распределения скорости получено нелинейное уравнение третьего порядка, отвечающее нелинейной волне с диссипатией и дисперсией. Указано, что это уравнение в частном случае пренебрежимо малой вязкости переходит в уравнение Кортевега—де Фриза.

ABSTRACT

In the article, a model of the filtration flow of a gas-liquid mixture is constructed in which the gas phase is represented by individual bubbles of small size dispersed in a liquid. The presence of a gas phase turns out to be on the equation of state that relates density to pressure.

Using the methods of nonlinear wave dynamics, for motion corresponding to a wave traveling in the same direction, a system of equations with nonlinearity, dissipation and dispersion is obtained. A solution is sought in the form of a quasi-simple wave, i.e. different from a simple wave by members of a higher order, smallness. A third-order nonlinear equation is obtained for the velocity distribution, which corresponds to a nonlinear wave with dissipation and dispersion. It is indicated that this equation in the particular case of negligible viscosity transforms into the Korteweg – de Vries equation.

Ключевые слова: уравнение Релея, истинное объемное газосодержание, волновые процессы в двухфазных системах, диссипатия, гомогенная модель, дисперсия

Keywords: Rayleigh equation, true volumetric gas content, wave processes in two-phase systems, dissipation, homogeneous model, dispersion

Для повышения нефтеизвлечения пластов применяют различные методы: физико-химические, термические и др. А также занимаются усовершенствованием систем заводнения пластов. С целью улучшения фильтрационных свойств жидкостей, представляет интерес рассмотрение вопросов закачки воды в пласт малым количеством газа. «Но-

вые» эффекты, возникающие в газожидкостных системах способствуют повышению нефтеизвлечения пластов, интенсификации добычи нефти.

Исследование новых эффектов, типа режима «обострения», усиление ударных волн и т.д. , возникающих при фильтрации нелинейных систем в пористой среде используется для регулирования и

контроля технологических процессов нефтедобычи.

Во многих явлениях природы, а также в технологических процессах потоки жидкости и газа взаимодействуют как единое целое. При взаимодействии жидкости и газа на границе раздела фаз могут образоваться динамические структуры в результате изменения скорости, давления, температуры и концентрации. Если рассматривать параллельные потоки газа и жидкости или две нерастворимые жидкости, то взаимодействие происходит только по одной непрерывной поверхности. Примером более сложной и неустойчивой структуры является поток пены. В этом случае компоненты потока расчленины на отдельные элементы, имеется ряд областей, замкнутых границами раздела.

Для исследования волновых явлений в газожидкостных системах в пористой среде организуем вычислительный эксперимент, суть которого заключается в следующем: строится математическая модель физического процесса, затем на основе этой модели и с помощью расчетов изучается влияние различных параметров на развитие процесса в целом.

Модель была построена при следующих предположениях: газожидкостная смесь с малым газосодержанием $\varphi \ll 1$; газовая фаза содержится в виде пузырьков одинакового размера, расстояние между пузырьками намного больше их радиуса, что позволяет рассматривать движение каждого пузырька независимо от движения соседних пузырьков, и существенно меньше длины волны или ширины возмущения.

Уравнения движения одномерного потока жидкости с мелкодиспергированным в ней газом в пористой среде запишем в виде обобщенного уравнения Эйлера-Жуковского [2]. Учет инерционных членов при расчете скорости распространения волны в двухфазной системе имеет принципиальное значение. Инерция жидкости приводит к дисперсии акустических волн, т.е. к зависимости скорости звука от частоты колебаний. При отбрасывании инерционных членов акустические скорости получаются бесконечными, а для более полного исследования процесса в начальные моменты времени, после прихода фронта волны давления, необходимо учитывать конечное значение скорости звука.

$$\frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{m} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{m} \right) \right) = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{k} w \right)$$

Уравнение неразрывности имеет вид: (1.1)

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = - \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} \quad (1.2)$$

Где t - время, x - координата, w - скорость движения смеси, ρ - плотность смеси, P - давление, μ - вязкость, k - проницаемость, m - пористость.

Смесь газа и жидкости рассматриваем как однородную среду, характеризующую некоторыми

значениями температуры, скорости, плотности, давления.

Для того, чтобы замкнуть уравнения движения и неразрывности, необходимо установить связь между изменением давления δP и изменением плотности $\delta \rho$. Для этого используем уравнение Рэлея для пульсации одиночного пузырька с учетом влияния вязкости жидкой среды: [2]

$$R \frac{dR^2}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right) = - \frac{1}{\rho} (P_\infty - P(R)) - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.3)$$

где $P(R)$ - давление на границе пузырька, P_∞ - давление в окружающей среде, ρ - плотность жидкости, R - радиус пузырька.

Применяя элементарные соотношения гомогенной модели, связывающие радиус пузырька R с плотностью смеси ρ [2,3], на основании уравнения Рэлея можно получить уравнение состояния в следующем виде:

$$\sigma P = \frac{P_0}{\rho_1 \varphi_0 (1 - \varphi_0)} \delta \rho + \frac{4}{3} \frac{\vartheta}{(1 - \varphi_0) \varphi_0} \frac{d\delta \rho}{dt} + \frac{R_0^2}{3(1 - \varphi_0) \varphi_0} \frac{d^2 \delta \rho}{dt^2} \quad (1.4)$$

Где P_0 - равновесное давление в смеси, R_0 - равновесный радиус пузырька, $\vartheta = \mu/\rho$ - кинетическая вязкость, $\varphi_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 N \rho$ - истинное объемное газосодержание.

Уравнения состояния (1.4) среды давления зависит от плотности среды, а также от первой производной $\partial \rho / \partial t$ - это связано с радиальным движением и вязкостью жидкости, и от $\partial^2 \rho / \partial t^2$ - что объясняется радиальной инерцией жидкости. В работе Б.С. Когарко отмечалось, что зависимость P от $\partial^2 \rho / \partial t^2$ отражает деформационную инерцию на сжатие и растяжение, характерную для пузырьков сред, т.е. после снятия сжимающего давления по инерции среда может продолжать сжиматься.

Коэффициент при приращении плотности смеси $\delta \rho$ совпадает выражением для низкочастотной скорости звука в двухфазной среде, при малом газосодержании $0,8 > \varphi \geq 10^{-3}$ имеет место формула Мэллока:

$$\alpha_0^2 = \frac{P_0}{\rho_1 \varphi_0 (1 - \varphi_0)}$$

Предполагается, что возмущения основных газодинамических величин $\sigma \rho / \rho_0$, $\delta P / P_0$, $w / (\alpha_0 m)$ имеют некоторый порядок малости ε . Очевидно, что и безразмерные коэффициенты при $d\sigma \rho / dt$ и $d^2 \delta \rho / dt^2$ имеют тот же порядок малости ε .

Пористую среду считаем малосжимаемой:

$$m - m_0 = \beta (P - P_0) \quad (1.5)$$

$\beta \ll 1$ -коэффициент сжимаемости пористой среды. Подставляя (1.4) в (1.5) и учитывая замечания о малости коэффициентов при $d\delta\rho/dt$ и $d^2\delta\rho/dt^2$ получаем $m \sim \alpha \rho$, где

$$\alpha = \frac{m_0}{\rho_0} + \beta \alpha_0^2 - \frac{\beta}{\rho_0} P_0 \quad (1.6)$$

При выводе уравнений используется метод нелинейной волновой динамики [4], который широко используется для анализа как стационарных, так и нестационарных плоских одномерных волн в различных средах (волны в вязком сжимаемом газе, гравитационные волны на поверхности воды, электромагнитные волны в проводящих средах и диэлектриках и т.д.), основан на сведении анализа процесса к решению уравнения Буссинеска и Бюргера-Кортега де Фриза, которые к настоящему времени подробно исследованы. Из уравнений непрерывности и волнового уравнения, написанных с точностью до ε , можно найти выражения для $d\delta\rho/dt$ и $d^2\delta\rho/dt^2$:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{d\delta\rho}{dt} &= -\frac{\rho}{m} \frac{\partial w}{\partial x} + 0(\varepsilon^2) \\ \text{б) } \frac{d^2\delta\rho}{dt^2} &= \alpha_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + 0(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и учитывая (а),(б), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{m^2} w \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{m^3} w^2 \frac{\partial m}{\partial x} \\ = \frac{1}{\rho} \left(\alpha_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{2\eta}{m} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 2\chi \alpha_0 \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} \right) - \frac{1}{\rho k} w \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} 2\eta = \frac{4}{3} \frac{v}{\varphi_0(1-\varphi_0)}, \quad 2\chi = \frac{1}{3} \frac{R_0^2 \alpha_0}{(1-\varphi_0)\varphi_0} \\ m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Системам (1.7)-(1.8) принимает вид системы уравнений Навы-Стокса-Буссинеска, описывающей распространение волн конечной амплитуды в газожидкостной среде. Газожидкостная смесь является диспергирующей. Влияние дисперсионных эффектов на движение смеси сконцентрировано в члене с третьей производной. Диссипативные потери, возникающие на границе раздела фаз описываются членом со второй производной, при чем коэффициент η имеет смысл объемной вязкости.

Решение системы (1.7)-(1.8) будем иметь в виде квазипростой волны, распространяющейся в одном направлении и являющейся суперпозицией простой волны и некоторого дополнительного возмущения.

$$\rho = \int \frac{\rho}{\alpha_0 m} dw + \psi(x, t) \quad (1.9)$$

Первое слагаемое, устанавливающее однозначную связь между w и ρ , соответствует простой волне, распространяющейся вдоль оси X по физически нелинейной, но недисперсионной и недиссипативной среде, а дополнительное возмущение $\psi(x, t)$ возникает из-за дисперсии и диссипации, и имеет общий порядок малости ε^2 т.к. эффекты дисперсии и диссипации определяются слагаемыми порядка ε^2 .

Рассмотрим уравнения (1.7) и (1.8) с точностью до ε^2 , это дает возможность учесть диссипативные, дисперсионные и нелинейные эффекты, влияющие на распространение возмущения в газожидкостной смеси в пористой среде. Подставляя (1.9) в (1.7) и (1.8) и пренебрегая членами выше второго порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \text{с) } \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{m} \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\alpha_0^2}{\rho} m \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ 2\chi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{m\mu}{\rho k} w \\ \text{д) } \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{m} \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\alpha_0 m}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Из условия тождественности левых частей уравнений в системе и учитывая соотношение (1.6), можно определить $\psi(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0^2}{\rho} m \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\chi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha \frac{\mu}{k} w - \frac{\alpha_0 m}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Введем переменную $\xi = x - \alpha_0 t$, и проинтегрируем уравнение (1.10) вдоль характеристики $x - \alpha_0 t = const$, полученное выражение подставим в (с) или (д), получаем одно уравнение в системе отсчета, движущейся со скоростью звука α_0 :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_0 \rho} w \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \chi \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\mu}{2k} w = 0 \quad (1.11)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{t} = \frac{t w_0}{l}, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{l}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_0}, \quad SP = \alpha \frac{\mu}{k w_0}$$

где l -ширина начального возмущения, w_0 - амплитуда начального возмущения. Тогда уравнение (1.11) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{w}{\alpha_0 \rho_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_1} - \frac{\eta}{w_0 l} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\chi}{w_0 l^2} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi_1^3} + \frac{SP}{2} \bar{w} = 0 \quad (1.12)$$

В случае $SP = 0$, уравнение (1.12) принимает вид уравнения Бюргера-Кортевега де Фриза, т.е. описывает эволюцию нелинейных волн в диссипативной среде. Особенностью полученного уравнения (1.12) является наличие еще одного параметра подобия SP , величина которого зависит от ширины

начального возмущения l , а также амплитуды начального возмущения w_0 . С помощью замены $\bar{w} = \tilde{w} * \exp(-t * \frac{SP}{2})$ уравнение (1.12) можно привести к виду:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\tilde{w}}{\alpha \rho_0} \exp\left(-t * \frac{SP}{2}\right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \frac{\eta}{w_0 l} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\chi}{w_0 l^2} \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} = 0 \quad (1.13)$$

В начальные моменты времени $t \rightarrow 0$, решение (1.13) асимптотически приближается к решению уравнения Кортевега де Фриза [3]. Уравнение (1.12) можно записать в автономном виде. Будем искать решение в виде бегущей волны $\tilde{w} = \bar{w}(\xi_1 - vt)$, где v - скорость распространения волны в системе отсчета, движущейся со скоростью α_0 . Подставляя в (1.12) для функции $w(z) = w(\xi_1 - vt)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\chi}{w_0 l^2} \frac{d^3 w}{dz^3} - \frac{\eta}{w_0 l} \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{1}{\alpha \rho_0} w - v\right) \frac{dw}{dz} + \frac{SP}{2} w = 0 \quad (1.14)$$

Запись уравнения не содержит в явном виде времени t . Уравнение (1.14) решалось численно при различных значениях SP и $\frac{\chi}{w_0 l^2}$.

Предварительное исследование уравнения (1.12) дает возможность иметь примерное представление о поведении волн, характерных для вышеуказанного физического процесса.

Нелинейность уравнений способствует возникновению новых эффектов, не имеющих места в линейных системах, а именно, образованию кноидальных волн (или «волнового пакета») и устойчивых пространственных структур. Изучение этих явлений способствует созданию новых способов интенсивного и экономного производства важнейших нефтепродуктов.

На основании предложенной модели выявлены новые эффекты, имеющие место при фильтрационном движении газожидкостной смеси, а именно, возникновение волн типа «солитон», волновых пакетов, «режимов» с обострением, позволяющие улучшить фильтрационные свойства нефти и воды, тем самым способствующие повышению нефтеотдачи пластов, интенсификации добычи нефти.

Литература

1. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., «Недра», 1975, 296с.
2. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск, «Наука», Сибирское отделение, 1984, 301с.
3. Бхатнагар П.Л. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М., Мир, 1983, 136 с.
4. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973, 175 с.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ВТОРОГО ПОРЯДКА В АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет

NECESSARY CONDITION OF SECOND ORDER EXTREMUM IN ANORIMARY LIMITATION TASKS

Sadigov Misraddin Allahverdi oglu
doctor of physico-mathematical sciences, professor
Baku State University

АННОТАЦИЯ.

В работе в нерегулярном случае установлены необходимые условия экстремума второго порядка для негладких экстремальных задач при наличии ограничений в счетно-банаховом пространстве. Используя классы $S-(\alpha, \beta, \delta)$ и $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \alpha(\beta))$ локально липшицевых отображений в точке, получены необходимые условия экстремума при наличии ограничений.

ABSTRACT.

In the irregular case the necessary second-order extremum conditions are obtained for nonsmooth extremal problems with constraints in a countable Banach space. Using the classes $S-(\alpha, \beta, \delta)$ and $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \alpha(\beta))$ locally Lipschitz mappings at a point, necessary conditions of the extremum are obtained for extreme problems in the presence of restrictions.

Ключевые слова: сублинейная функция, касательный конус, отображение, локальный минимум.
Key words: sublinear function, tangent cone, map, local minimum.

1. Вспомогательные результаты