

# ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

## МЕТОДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Габдрахманова Неля Талгатовна*

*доцент, к.т.н., доцент, РУДН, г. Москва*

*Алероев Увайс Ахмадович*

*магистр МИ им. С.М. Никольского, РУДН, г. Москва*

## METHODS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY IN ESTIMATING THE STABILITY OF A DYNAMIC SYSTEM

*Gabrakhmanova Nelya Talgatovna*

*Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,*

*Associate Professor, RUDN University, Moscow*

*Aleroev Uvais Ahmadovich*

*Master of MI them. S.M. Nikolsky, PFUR, Moscow*

### АННОТАЦИЯ

Оценка устойчивости динамической сложной системы является важной для анализа поведения систем в самых различных областях. Такие задачи возникают в экономике, технике, медицине, биологии и т.д. В последнее время, в ряде работ были получены интересные результаты исследования устойчивости с применением геометрии. В данной работе, авторы представляют ряд своих результатов исследований различных объектов на реальных данных, показывающих о возможности геометрического подхода в решении поставленной задачи. Целью данной работы является исследование возможности использования аналогов кривизны Риччи для метрических пространств, порожденных графами, а также, разработка методов и алгоритмов решения задачи анализа устойчивости различных объектов.

### ABSTRACT

The Evaluation of stability dynamic complex system is important for analyzing the behavior of systems in a variety of areas. Such problems arise in Economics, engineering, medicine, biology, etc. Recently, in a number of works were obtained interesting results of stability using geometry. In this paper, the authors present their results of studies of various objects on real data, showing the possibility of a geometric approach to solving the problem. The main aim of this work is to research the possibility of using analogs of Ricci curvature for metric spaces generated by graphs, as well as the development of methods and algorithms for solving the problem of stability analysis of various objects.

**Keywords:** the stability of the dynamic system, the Ricci curvature, Markov chain

**Ключевые слова:** устойчивость динамической системы, кривизна Риччи, цепь Маркова.

### Введение

Многие динамические системы представимы в виде сложной сети взаимодействующих агентов над некоторым информационным полем. Например, в виде сложной сети можно представить множество показателей некоторой отрасли в данный момент времени. Хорошим математическим инструментом изучения структуры сетей являются графы. В настоящее время вводятся аналоги понятий выпуклости, оператора Лапласа, кривизн Риччи для метрических пространств, порожденных графами. Это позволяет использовать методы дифференциальной геометрии при анализе структуры графа.

Классическая кривизна Риччи играет важную роль в геометрическом анализе римановых многообразий. Кривизна Риччи в заданной точке характеризует среднюю кривизну секционных кривизн по всем направлениям. Понятие кривизны Риччи для метрических пространств общего вида впервые было введено в работах Бакри и Эмери [1]. Олливье [7] в 2009 году дал определение грубой кривизны

Риччи на цепях Маркова, которое можно использовать для метрических пространств, порожденных графами. Чанг и Яу [3] впервые ввели определение кривизны Риччи для графов в 1996 году. А в 2011 году Лин, Лу и Яу [4,5] модифицировали определение Олливье для кривизны Риччи цепей Маркова на метрических пространствах.

### Энтропия и кривизна Риччи

Кривизна Риччи может служить индикатором надежности сети. Основные результаты этого положения разработаны в ряде работ. В работе [2] Деметрий формально определил "устойчивость", применяя теорию больших отклонений и показал через флуктуационную теорему, что устойчивость коррелирует с энтропией. Более формально. Рассмотрим случайные колебания в системе. Обозначим через  $p_\delta(t)$  вероятность отклонения не более чем на  $\delta$  среднего от исходного (невозмущенного) значения в момент времени  $t$ . При стандартных допущениях, оценку относительной скорости, с которой система возвращается к своему начальному состоянию и измеряет его устойчивость является функция:

$$R := \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{t} \log p_\delta(t) \right).$$

Большое  $R$  означает небольшое отклонение, а малый  $R$  соответствует большим отклонениям. В термодинамике хорошо известно, что функции энтропии и скорости от больших отклонений очень тесно связаны. Флуктуационная теорема является выражением этого факта для сетей и может быть выражена в терминах устойчивости  $\Delta F = -\Delta R$  как  $\Delta S_e \times \Delta F \leq 0$ , где  $S_e$  сетевая энтропия. В частности, для цепей Маркова сетевая энтропия может быть определена так:

$$S_e = \sum_x \pi(x) \bar{S}(x) \text{ с } \bar{S}(x) = -\sum_y p_{xy} \log p_{xy}$$

$p_{xy}$  – вероятность перехода из состояния  $x$  в  $y$ . В  $\bar{S}(x)$  суммирование только по смежным вершинам с  $x$ .

В работах Лотт и Вильяни [6] показано, что энтропия положительно коррелирована с кривизной Риччи

$$\Delta S_e \times \Delta Ric \geq 0.$$

Ниже, на числовых примерах будет видно, что сигнал с более высокой кривизной способен быстрее вернуться в равновесие, т.е. более устойчивый.

Следовательно, для оценки устойчивости системы к возмущениям можно исследовать оценки кривизны Риччи. Однако, приведенные выше теоремы неразрешимы на дискретном пространстве графов. С этой целью, рассмотрим кривизны Олливе – Риччи.

#### Расстояние Вассерштейна

Определение кривизны Олливе – Риччи использует расстояние Вассерштейна между мерами. Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $d$  – расстояние. Пусть  $\mu_1, \mu_2$  две меры метрического пространства с одинаковой массой. Расстояние Вассерштейна на  $L^p$  между мерами  $\mu_1, \mu_2$  определяется:

$$W_p(\mu_1, \mu_2) := \left( \inf_{\mu \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \iint d(x, y)^p d\mu(x, y) \right)^{1/p}, \quad (1)$$

где  $\Pi(\mu_1, \mu_2)$  – это множество мер на  $X \times X$  проецируемое на  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,

$$\int_y d\mu(x, y) = d\mu_1(x), \int_x d\mu(x, y) = d\mu_1(y).$$

#### Кривизна Олливе – Риччи

Рассмотрим взвешенный граф  $G(V, E)$ . Весовая функция  $\omega: E \rightarrow R$  ставит каждому ребру вес равный 1. Весовая функция порождает функцию расстояния  $d: V \times V \rightarrow R$ . Функция расстояния удовлетворяет всем требованиям метрики, поэтому  $(V, d)$  можно рассматривать как метрическое пространство. На метрическом пространстве можно задать для любого  $x \in X$  семейство мер  $m_x$ , удовлетворяющее двум следующим предположениям:

- мера  $m_x$  зависит от точки  $x \in X$ ;
- каждая мера  $m_x$  имеет конечный первый момент.

Например,

$$m_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, & x = y \\ 1 - \alpha \\ \deg(x), & x \sim y \\ 0, & x \neq y, x \not\sim y \end{cases}$$

$\deg(x)$  – степень вершины  $x$ ;  $x \sim y$  – означает, что  $x$  и  $y$  смежные вершины.

Семейство вероятностных мер  $m_x(\cdot)$  определяет вероятность перехода из малой окрестности точки  $x$  пространства  $X$  в малые окрестности всех точек  $(\cdot)$  пространства. Задание семейства мер позволяет рассматривать наш граф как марковскую цепь. Каждый элемент семейства  $m_x(\cdot)$  можно интерпретировать как план перераспределения единичной массы из точки  $x$  во все точки  $X$  за один шаг марковской цепи.

Пусть  $x, y \in X$  две различные точки. Локальная кривизна между парой точек  $x, y$  пространства определяется формулой

$$k(x, y) := 1 - \frac{\tau(m_x, m_y)}{d(x, y)},$$

где  $\tau(m_x, m_y)$  расстояние Вассерштейна между мерами  $m_x$  и  $m_y$ , вычисленные по формуле (1), где  $p=1$ :

$$\tau(\mu_1, \mu_2) := \inf_{\varepsilon \in \Pi} \int_{(x, y) \in X \times X} d(x, y) d\varepsilon(x, y).$$

#### Корреляционная сеть

Построение корреляционной сети осуществляется на основе теории графов и классической корреляции. В качестве вершин сложной сети принимаются объекты, в качестве ребер – связи между ними, вес ребра – оценка коэффициента корреляции между вершинами. В общем виде формула для подсчета коэффициента корреляции такова:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - M_x)(y_i - M_y)}{\sqrt{\sum (x_i - M_x)^2 \cdot \sum (y_i - M_y)^2}}$$

где  $x_i$  – значения, принимаемые переменной  $x$ ;  $y_i$  – значения, принимаемые переменной  $y$ ;  $M_x$  – средняя по  $x$ ;  $M_y$  – средняя по  $y$ . Расчет коэффициента корреляции Пирсона предполагает, что переменные  $x$  и  $y$  распределены нормально.

На корреляционных сетях также можно построить аналог кривизны Риччи.

По аналогии с кривизной в римановой геометрии, кривизна Риччи интерпретируется как величина перекрытия между окрестностями двух соседних вершин. Для решения используется понятие локального коэффициента кластеризации, который показывает плотность треугольных отношений.

Для решения задачи оценки кривизны Риччи используется формула Watts-Strogatz [8]:

$$curv(A) = t/(v(v-1)/2) \quad (2)$$

здесь  $v$  – числа вершин и  $t$  – число треугольников, которые образованы ребрами графа, содержащими вершину  $A$ . Данная функция – функция двух переменных. Заметим, что величина  $v(v-1)/2$  – максимальное количество треугольников, которое можно составить с помощью всех вершин графа.

#### Числовые примеры

Постановка задачи 1. Даны 29 показателей за 98 периодов нефтяной отрасли. Согласно экспертам, показатели адекватно описывают динамику отрасли.

Необходимо, по данным показателей установить устойчивость развития отрасли.

#### Решение задачи 1.

По данным выборки показателей, найдены оценки парных коэффициентов корреляций. Корреляционная сеть строится следующим образом. Вершины сети – объекты (показатели), все вершины соединены ребрами. Вес ребра – равен выборочному

коэффициенту корреляции Пирсона. Выбирается некоторый порог  $h$  и удаляются ребра с весами меньше  $h$ . Для вершин полученного графа вычисляются коэффициенты локальной кластеризации по формуле (2).

Фрагмент матрицы парных корреляций представлен в таблице 1.

Таблица 1

Матрица парных корреляций

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	1,00	0,61	0,50	0,11	0,49	0,41	0,12	0,16	0,48
X2	0,61	1,00	0,32	0,28	0,31	0,54	0,20	0,17	0,73
X3	0,50	0,32	1,00	0,21	0,45	0,30	0,08	0,02	0,28
X4	0,11	0,28	0,21	1,00	0,03	0,22	0,03	0,37	0,48
X5	0,49	0,31	0,45	0,03	1,00	0,67	0,32	0,05	0,26
X6	0,41	0,54	0,30	0,22	0,67	1,00	0,24	0,33	0,42
X7	0,12	0,20	0,08	0,03	0,32	0,24	1,00	0,55	0,08
X8	0,16	0,17	0,02	0,37	0,05	0,33	0,55	1,00	0,15
X9	0,48	0,73	0,28	0,48	0,26	0,42	0,08	0,15	1,00

Корреляционную сеть можно рассматривать как неориентированный взвешенный граф. Удалим ребра с весом меньше 0,7. Для полученного графа вычислим локальный коэффициент кластеризации, который характеризует плотность треугольных связей. Согласно мнениям экспертов, при устойчивом развитии отрасли, все выбранные показатели (вершины) должны согласованно расти. Это ситуация, отвечает тому, что вершины графа должны иметь высокий коэффициент кластеризации.

Рассмотрим характеристики вершин графа в динамике. Для этого, разобьем весь интервал на  $n$  периодов и вычислим для каждого периода кривизны вершин графа. Для общей характеристики ситуации в каждый период мы ввели средний локальный коэффициент кластеризации:

$$k_i = \text{curv}(G_i) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \text{curv}(j), \quad (3)$$

где  $i$  – номер периода,  $n_i$  – число вершин графа периода  $i$ .

Для вычислений локальных коэффициентов кластеризации и их усредненных значений разработана программа. Числовые эксперименты показали, что средняя локального коэффициента кластеризации имеет динамику роста. Это можно интерпретировать как устойчивое развитие отрасли.

#### Перекрестная проверка задачи 1

В качестве перекрестной проверки результатов построений модели оценки устойчивости динамических систем, использованы показатели, построенные экспертами. На рис.1. серая линия – линия оценки устойчивости развития по показателю эксперта ( $x$ ); темно-серая линия – линия усредненного значения локального коэффициента кластеризации ( $k$ ). Из графика видно, что мнение эксперта совпадают с оценками

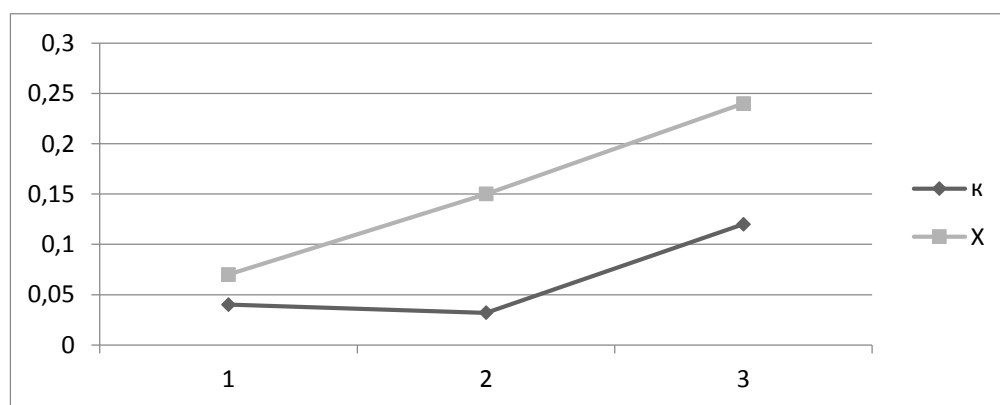


Рис. 1. Серая линия ( $x$ ) – динамика показателя эксперта; темно-серая линия – линия усредненного значения локального коэффициента кластеризации.

#### Постановка задачи 2.

Даны данные курса 2х валют. BTC\_USD — данные курса биткойна к доллару и

USD\_JPY — курса доллара к йене за период  $T=1$  год с шагом  $t=5$  дней. Необходимо, сравнить устойчивость этих курсов валют.

Решение задачи 2. После предобработки временных курсы валют можно рассматривать как марковский процесс. Для марковских процессов можно вычислить кривизны Олливье – Риччи. На рис 2,3 приведены графики вычисленных значений кривизн Олливье-Риччи для курса валют BTC\_USD

и USD\_JPY. Исследования показали, что курсу валют с большей дисперсией (BTC\_USD) соответствуют кривизны Олливье – Риччи с большим размахом (рис.2); курсу валют с меньшей дисперсией

(USD\_JPY) соответствуют кривизны Олливье – Риччи с меньшим размахом (рис.3).

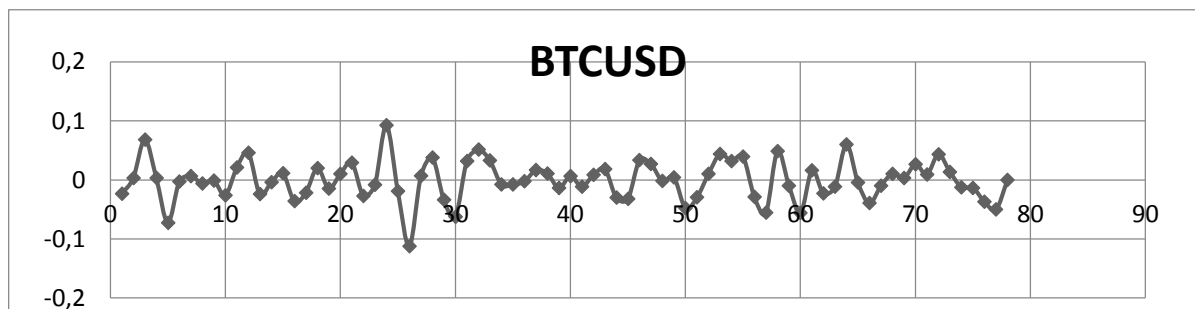


Рис.2. Оценки кривизны Риччи для курса BTC\_USD.

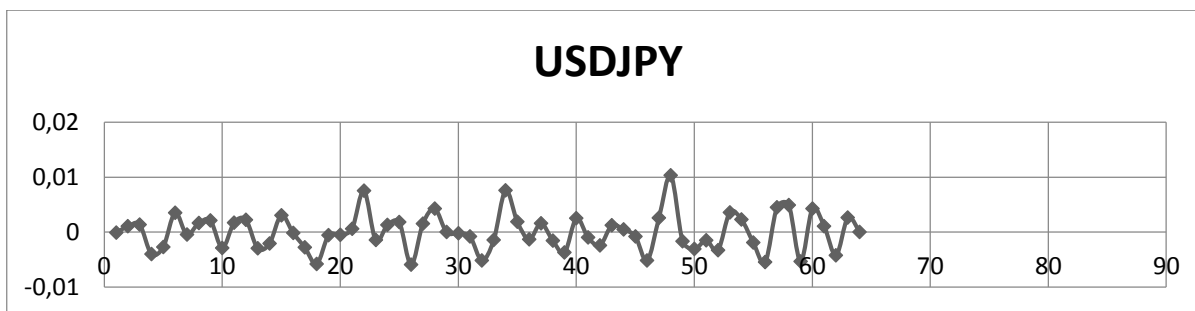


Рис.3. Оценки кривизны Риччи для курса USD\_JPY.

Из этих исследований видно, что, когда курс сильно возрастает, положительная кривизна Олливье-Риччи также возрастает. Динамическая система как бы сжимается и пытается привести систему в исходное состояние.

Для проверки полученных выводов, в качестве параллельной модели разработаны нейросетевые модели идентификации курсов валют. С помощью нейросетевых моделей получены оценки старшего показателя Ляпунова. Вычисления показали, что для обоих курсов валют старшие показатели положительные. Причем, старший показатель Ляпунова для курса USD\_JPY больше, чем для BTC\_USD.

#### **Выводы**

Проведенные исследования показывают, что геометрические методы позволяют найти новые способы оценки устойчивости динамики развития сложной системы. Для всех решенных выше задач разработаны программы. В дальнейшем предполагается продолжить исследования в этом направлении.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-08-00261

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100»

#### **Литература:**

1. D. Bakry and M. Emery, Diffusions hypercontractives (French) [Hypercontractive diffusions], S'eminare de probabilites, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math. 1123, J. Az'ema and M. Yor (Editors), Springer, Berlin, 1985, pp. 177-206.
2. Demetrius, L. Boltzmann, Darwin and directionality theory. Physics Reports. 530, 1-85 (2013).
3. Fan Chung, S.-T. Yau Logarithmic Harnack inequalities Math. Res. Lett., 1996, 793\_812.
4. Lin Y., Yau S. T. Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs // Math. Res. Lett., 2010, 17, 345-358.
5. Lin Y., Lu L. Y., Yau S. T. Ricci curvature of graphs // Tohoku Mathematical Journal, 2011, 63, 605-627.
6. Lott, J. & Villani, C. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. Annals of Mathematics. 169, 903-991 (2009).
7. Ollivier Y., Ricci curvature of Markov chains on metric spaces // J.Funct.Anal. 2009, 256(3), 810-864.49
8. Watts DJ and Strogatz SH Collective dynamics of 'small-world' networks Nature 1998, 393:440-442