The theorem is proven completely. **Comment.** If in (*) the game is considered finished when the average value

$$z_{i,j}, i_0 \le i \le i_1, j_0 \le j \le j_1 : z = \frac{1}{\lambda\mu}\sum_{i_0}^{i_1=i_0+\lambda}\sum_{j_0}^{j_1=j_0+\mu} z_{i,j}, 1 \le i_0, i_1 \le m, 1 \le j_0, j_1 \le \theta - 1$$

satisfies the condition $\delta \le z \le \delta + \varepsilon$. Then a corresponding change can easily generalize Theorems 1-3.

Bibliography

[1] Godunov S.K., Ryabenky V.S. Difference schemes. - M .: Science, 1977, 440 p.

[2] Samara A.A., Nikolaev E.S. Methods for solving grid equations. - M .: Science, 1978, 570 p.

[3] Pashkovsky S. Computational applications of polynomials and Chebyshev series. - M .: Science, 1983, 487 p.

[4] Isaacs R. Differential games .- M .: Mir, 1967, 500 p.

[5] Azamov A.A. Foundations of the theory of discrete games. - Tashkent .: Niso Poligraf, 2011, 160 p.

[6] Dzyubenko G.Ts., Pshenichny B.N. Discrete differential games with information lag // Cybernetics, 1972, №6, p.65-71.

[7] Mamatov M.Sh. On the theory of differential games of pursuit in systems with distributed parameters // Automation and Computer Sciences, 2009, № 1, p. 5-14.

[8] Mamatov M.Sh. On the application of the finite difference method to solving the problem of pursuit in systems with distributed parameters // Automation and Remote Control, 2009, № 8, p.123-132.

[9] Mamatov M.Sh., Alimov Kh.N. On solving the problem of pursuit in high-order controlled distributed systems // Mathematical works, 2013, v.16, №2, p.1-16.

[10] Mamatov M.Sh., Tukhtasinov M. About the pursuit problem in distributed controlled systems // Cybernetics and Systems Analysis, 2009, V. 45, No. 2, p. 153-158.

[11] Chikriy A.A. On linear discrete quality games // Cybernetics. - Kiev. 1971. - № 5. - С. 90-99.

[12] Chikriy A.A., Chikriy G.Ts. On awareness in discrete game problems // Cybernetics, 1979, № 5, p. 126-128.

[13] Fazylov A.Z. The existence of the nucleus of a convex set in linear discrete control systems // Mathematical Notes, 1995, vol.58, №1, p.119-126.

[14] Satimov N. Yu. On two methods of pursuit in linear discrete games // DAN Uz SSR, 1979, No. 11, p. 3-4.

[15] Satimov N. Yu. The problem of runaway for one class of nonlinear discrete games // Techn. Cybern. Izv. Academy of Sciences of the USSR, 1973, v. 9, No. 6, p.45-48.

[16] Satimov N. Yu., Azamov A.A. Nonlinear discrete games of runaway // Cybernetics, 1976, №4, pp.79-74.

[17] Pontryagin L.S. Linear differential pursuit games // Mat. Collection, 1980, Vol. 112, No. 3, p. 307-330.

DISCRETE PLAYING OF PERSECUTION WITH LEVEL OF BRIGHTNESS OF DIGITAL IMAGE DESCRIBED BY SECOND ORDER EQUATIONS

Mamatov M.SH.

The work is devoted to the study of a class of discrete pursuit games with a digital image level, which is described by systems of second-order equations. Sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit in discrete games with boundary conditions. When solving the problem of pursuit with the level of a digital image, Chebyshev polynomials of the second kind are used.

Keywords: pursuit, pursuer, evader, terminal set, pursuit control, evasion control

УДК 519.854.3

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧАСТИЧНО-ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Мамедов Князь Шираслан[1],
Мамедли Нигяр Октай[2]
[1] Доктор физико-математических наук ,профессор Бакинского Государственного Университета и
[1]Зав.лаб. Института Системных Управлений,
[2]Докторант Института Системных Управлений
DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.61.2

АННОТАЦИЯ.

В работе разработан новый подход для построения субоптимистического и субпессимиситического решений интервальной задачи частично-целочисленного программирования. Этот подход основан на понятии нелинейно-возрастающего штрафа. Исходя из этого, разработаны два метода для построения решений. Эти методы запрограммированы и проведён ряд вычислительных экспериментов. Проведённые эксперименты ещё раз подтверждали высокую эффективность разработанных методов.

ABSTRACT.

In this article, a new approach to construct subobtimistic and subpes-simistic solutions of an interval problem of mixed-integer programming is developed. This approach is based on a concept of nonlinearly increasing penalty. On this basis, two methods for constructing solutions are developed. The programs of methods were compiled, and a number of numerical experiments were carried out on problems of sufficiently large dimension. Conducted experiments confirmed high efficiency of proposed methods.

Ключевые слова: интервальная задача частично-целочисленного прог-раммирования, нелинейно-возрастающий штраф, допустимое, оптимистичес-кое, пессимистическое, субоптимистическое и субпессимистическое решения, вычислительные эксперименты, погрешности.

Keywords: an interval problem of mixed-integer programming, a nonlinearly-increasing penalty, an admissible solution, optimistic, pessimistic, suboptimistic and subpessimistic solutions, computational experiments, errors.

1.Введение. Рассмотрим следующую интервальную задачу частично-целочисленного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j,\bar{c}_j]x_j+\sum_{j=n+1}^{N}[\underline{c}_j,\bar{c}_j]x_j\to\max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]x_j+\sum_{j=n+1}^{N}[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]x_j\le[\underline{b}_i,\bar{b}_i],\ (i=\overline{1,m}), \tag{2}$$

$$0\le x_j\le d_j,\ (j=\overline{1,N}), \tag{3}$$

$$x_j,\ \text{целые},\ (j=\overline{1,n}),\ (n\le N). \tag{4}$$

Здесь предполагается, что $0<\underline{c}_j\le\bar{c}_j,\ 0\le\underline{a}_{ij}\le\bar{a}_{ij},\ 0<\underline{b}_i\le\bar{b}_i,\ d_j>0,$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,N})$ заданные целые числа.

Прежде всего отметим, что задача (1)-(4) является обобщением следующих задач: задач линейного программирования, интервальной задачи линейного программирования, задач Булевого программирования, интервальной задачи Булевого программирования, задачи частично-Булевого программирования, интервальной задачи частично-Булевого программирования, целочисленного программирования, интервальной задачи целочисленного программирования, задач о ранце, целочисленной задачи о ранце и интервальной целочисленной задачи о ранце. Необходимо заметить, что все перечисленные задачи, кроме задач линейного программирования входят в класс NP-полных. Поэтому задача (1)-(4) также входит в класс NP-полных, т.е. трудно-решаемых. В работах [2,3,4,7] исследованы интервальные задачи целочисленного программирования. А задачи линейного программирования (нецелочисленного) рассмотрены в работах [5,6,10] и предложены специфические методы решения.

В данной работе мы рассматривали более общую задачу (1)-(4), с целью разработки методов построения приближённого решения. Для этого будем использовать понятие нелинейно-возрастающего штрафа, введенное ниже.

2. Постановка задачи. Отметим, что рассмотренная модель (1)-(4) встречается во многих областях экономики. В частности, если в некоторой области производства выпускаются N видов товар, из них n видов $(n\le N)$ штучные товары, то может иметь место модель (1)-(4).

Допустим, что в некоторой области производства для выпуска N видов товар выделен m видов ресурсов, объем которого входит в интервал $[\underline{b}_i,\bar{b}_i],\ (i=\overline{1,m})$. При этом расходы для производства каждой единицы $j-$ого товара даёт прибыль, входящий в интервал $[\underline{c}_j,\bar{c}_j],\ (j=\overline{1,N})$. При этом требуется расходы из общего объёма, входящий в интервал $[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}],\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,N})$. В такой постановке, очевидно, что необходимо найти такой объём произведённых штучных и нештучных товаров, для которых общая прибыль была максимальной, а суммарные расходы не превышали заданных ресурсов

$[\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$. Очевидно, что принимая неизвестные x_j, $(j=\overline{1,N})$ удовлетворяющие условиям (3), (4), получается задача (1)-(4).

3. Теоретическое обоснование метода. Для разработки метода приближённого решения задачи (1)-(4), необходимо вести следующие определения, которые являются более общей, чем введенные в работах в [8,9]. При этом использованы принципы интервальных исчислений.

Определение 1*.* Вектор $X=(x_1,...,x_N)$ называется допустимым решением задачи (1)-(4), если для $\forall a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}], \forall b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,N})$ выполняется условия (2)-(4).

Определение 2. Оптимистическим решением задачи (1)-(4) называем такое допустимое решение $X^{op}=(x_1^{op}, x_2^{op}, ..., x_N^{op})$, если для $\forall b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$ удовлетворяется система $\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_{ij} x_j^{op} \le b_i$, $(i=\overline{1,m})$ и для этого решение функции $f^{op}=\sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{op}$ принимает максимальное значение.

Определение 3. Пессимистическим решением задачи (1)-(4) называем такое допустимое решение $X^{p}=(x_1^{p}, x_2^{p}, ..., x_N^{p})$, если для $\forall b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$ удовлетворяется система $\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_{ij} x_j^{p} \le b_i$, $(i=\overline{1,m})$ и для этого решение функции $f^{p}=\sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{p}$ принимает максимальное значение.

Определение 4. Субоптимистическим (приближённым) решением задачи (1)-(4) называем такое допустимое решение $X^{so}=(x_1^{so}, x_2^{so}, ..., x_N^{so})$, если для $\forall b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$ удовлетворяется система $\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_{ij} x_j^{so} \le b_i$, $(i=\overline{1,m})$ и для этого решение функции $f^{so}=\sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{so}$ принимает большое значение.

Определение 5. Субпессимистическим (приближённым) решением задачи (1)-(4*)* называем такое допустимое решение $X^{sp}=(x_1^{sp}, x_2^{sp}, ..., x_N^{sp})$, если для $\forall b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$ удовлетворяется система $\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_{ij} x_j^{sp} \le b_i$, $(i=\overline{1,m})$ и для этого решение функции $f^{sp}=\sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{sp}$ принимает большое значение.

Фиксируем некоторые $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$ и после этого обе части неравенства (2) разделим на $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i=\overline{1,m})$. В результате получаем следующую эквивалентную задачу:

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{c}_j, \overline{c}_j] x_j + \sum_{j=n+1}^{N} [\underline{c}_j, \overline{c}_j] x_j \to \max \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}] x_j + \sum_{j=n+1}^{N} [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}] x_j \le 1,\ (i=\overline{1,m}), \tag{6}$$

$$0 \le x_j \le d_j,\ (j=\overline{1,N}), \tag{7}$$

$$x_j,\ \text{целые},\ (j=\overline{1,n}),\ (n \le N). \tag{8}$$

Здесь $\underline{\alpha}_{ij} = \underline{a}_{ij} / b_i$, $\overline{\alpha}_{ij} = \overline{a}_{ij} / b_i$, $0 \le \underline{\alpha}_{ij} \le 1$, $0 \le \overline{\alpha}_{ij} \le 1$, $(i=\overline{1,m}), (j=\overline{1,N})$. Поскольку задача (5)-(8) входит в класс NP–полных, нахождение оптимистического и пессимистического решений будет требовать нереальное время. Поэтому мы разработали алгоритм построения субоптимистического и субоптимистического (приближённого) решения этих задач.

В начале построения субоптимистического решения принимается $X^{so}=(x_1^{so},x_2^{so},...,x_N^{so})=(0,0,...,0)$. Далее для различного j_* последовательно принимается положительное значение x_*^{so}. Нахождение номера j_* определяется ниже:

Определение 6. Число $\underline{t}_i=1/(1-\underline{r}_i),\ (i=\overline{1,m})$ назовём **штрафом** за использование оставшихся правых частей системы (3.2) для принятия очередного положительного значения $x_j^{so},\ (j=\overline{1,N}),$ где $\underline{r}_i=\sum_{j\in\omega}\underline{\alpha}_{ij}x_j^{so},\ (i=\overline{1,m}),\ \omega=\{j,|x_j^{so}>0\}.$

Из этого определения непосредственно видно, что увеличением использованных ресурсов $\underline{\alpha}_{ij}$, $(i=\overline{1,m}),\ (j=\overline{1,N}),$ т.е. увеличением $\underline{r}_i,\ (i=\overline{1,m}),$ значение штрафа $\underline{t}_i,\ (i=\overline{1,m})$ возрастает нелинейно, т.е. быстрее, чем по линейному закону. Уместно, заметить, что в работе [8] такой тип штрафа принят для интервальной задачи целочисленного программирования. А в данной работе эти понятия расширены для интервальной задачи частично-целочисленного программирования. Из определения штрафа $\underline{t}_i,\ (i=\overline{1,m})$ видно, что принятия такого типа штрафа обеспечивает меньшее использование оставшихся правых частей.

Отметим, что с целью усиления штрафа за меньшее использование меньших ресурсов можно принимать $\underline{t}_i=1/(1-\underline{r}_i)^k,\ (i=\overline{1,m}),$ где k - фиксированное, натуральное число. При вычислительных экспериментах выяснилось, что лучшее решения получается при $k=1$ или $k=2$.

Учитывая вышеуказанные, общий штраф для принятия положительного значения $x_j^{so},\ (j\in I\cup R)$ составляет

$$\underline{q}_j=\sum_{j=1}^{N}\underline{\alpha}_{ij}\underline{t}_i,\ (j=\overline{1,N}), \tag{9}$$

где $I=\{1,2,...,n\}$ и $R=\{n+1,n+2,...,N\}$.

Тогда прибыль за каждую единицу штрафа составляет $\bar{c}_j/\underline{q}_j,\ (j\in I\cup R)$. Очевидно, что необходимо принимать положительные значения для такой $x_{j_*}^{so}$, который соответствует максимальному значению $\bar{c}_j/\underline{q}_j,\ (j=\overline{1,N}).$ Таким образом, получаем следующий критерий выбора номера j_*:

$$j_*=\arg\max_{j\in I\cup R}\{\bar{c}_j/\underline{q}_j\} \tag{10}$$

Отметим, что построение субпессимистического решения проводится аналогично построению субоптимистического решения. При этом вместо формулы (9) и (10) принимается $\bar{q}_j=\sum_{j=1}^{N}\bar{\alpha}_{ij}\cdot\bar{t}_i$, $(j=\overline{1,N}),$ и $j_*=\arg\max_{j\in I\cup R}\{\underline{c}_j/\bar{q}_j\},$ где $\bar{t}_i=1/(1-\bar{r}_i),\ (i=\overline{1,m}),$ $\bar{r}_i=\sum_{j\in\omega}\bar{\alpha}_{ij}x_j^{sp}$, $(i=\overline{1,m}),\ \omega=\{j,|x_j^{sp}>0\}.$ В начале пос-троения субпессимистического решения принимается $X^{sp}=(x_1^{sp},x_2^{sp},...,x_N^{sp})==(0,0,...,0)$ Используя критерий (10), для построения приближённого (субоптимистического) решения нами разработаны два подхода:

I подход. Вначале принимаем $X^{so}=(x_1^{so},x_2^{so},...,x_N^{so})=(0,0,...,0)$. Тогда по определению 6, $\omega=\varnothing$ и $\underline{r}_i=0,\ (i=\overline{1,m}).$ Следовательно, $\underline{t}_i=1,\ (i=\overline{1,m}).$ Тогда,

$$\underline{q}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{\alpha}_{ij} \underline{t}_i, \ (j \in I \cup R).$$

Таким образом, по критерию (10) можно определить конкретный номер j_*. Очевидно, что необходимо учитывать 2 случая: $j_* \in I$ или $j_* \in R.$

Случай 1. Пусть $j_* \in I$. Тогда $x_{j_*}^{so}$ должен принимать только целые значения следующим образом: $x_{j_*}^{so} := \min\left\{ d_{j_*}, \min_i \left[\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij_*}} \right] \right\}$, где [z] означает целую часть числа z. Далее принимается, $\omega := \omega \cup \{j_*\},\ I := I \setminus \{j_*\},$

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i + \sum_{j \in \omega} \underline{\alpha}_{ij} x_{j_*}^{so},\ (i = \overline{1,m}).$$

Если хотя бы для одного i удовлетворяется $\underline{r}_i = 1$, то процесс построения решения завершается. Иначе находим $\underline{t}_i = 1/(1-\underline{r}_i), (i = \overline{1,m}),$ и по формуле (9) вычисляем очередной $\underline{q}_j, (j \in I \cup R).$ После этого по критерию (10) находится текущий номер j_*.

Случай 2. Пусть номер $j_*,$ найденный по критерию (10) входит во множество R , т.е. $j_* \in R.$ Тогда неизвестный $x_{j_*}^{so}$ будет принимать любое значение из интервала $[0,\ d_{j_*}],$ (не только целые). При этом значение $x_{j_*}^{so}$ определяется учитывая следующие условия:

$x_{j_*}^{so} := \min\left\{ d_{j_*}, \min_i \left(\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij_*}} \right) \right\}.$ Если $d_{j_*} < \min_i \left(\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij_*}} \right),$ то принимаем $x_{j_*}^{so} = d_{j_*}$, $\omega := \omega \cup \{j_*\},\ R := R \setminus \{j_*\}.$ Далее, находим $\underline{r}_i = \underline{r}_i + \sum_{j \in \omega} \underline{\alpha}_{ij} x_{j_*}^{so},\ (i = \overline{1,m}).$ Необходи-мо отметить, что если хотя бы для одного $i,\ (i = \overline{1,m}),\ \underline{r}_i = 1,$ то процесс постро-ения решения завершается. А в случае $\underline{r}_i < 1,\ (i = \overline{1,m})$ вычисляем $\underline{t}_i = 1/(1-\underline{r}_i),\ (i = \overline{1,m})$ и по формуле (9) находя текущие новые значения $\underline{q}_j,\ (j = \overline{1,N})$ и про-цесс построения решения продолжается.

В случае $d_{j_*} \geq \min_i \left(\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij_*}} \right),$ принимаем $x_{j_*}^{so} := \min_i \left(\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij_*}} \right) = \left(\frac{1-\underline{r}_{i_*}}{\underline{\alpha}_{i_* j_*}} \right).$ Очевидно, что неравенство с номером i_* из системы (6) будет выполняться как равенство. Поэтому процесс построения решений завершается.

II подход. Если $j_* \in I,$ то построение субоптимистического решения выполняется согласно 1-ому случаю первого подхода а в случае $j_* \in R,$, т.е. когда неизвестный $x_{j_*}^{so}$ может принимать любые значения из интервала $[0,\ d_{j_*}],$ значение $x_{j_*}^{so}$ определяем учитывая следующие условия: если $d_{j_*} < \min_i \left(\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij_*}} \right),$ то принимаем $x_{j_*}^{so} = d_{j_*},\ \omega := \omega \cup \{j_*\},\ R := R \setminus \{j_*\}.$ Если хотя бы для одного i, $(i=\overline{1,m})$ выполняется условие $d_{j*} \ge \min_i \left(\frac{1-\underline{r}_i}{\underline{\alpha}_{ij*}} \right)$, то фиксируем все найденные значения x_j^{so}, принимаем $x_j^{so}=0$, для $j \in I$ подставим в ограничению (6), а для остальных x_j^{so}, $(j \in R)$ строим задачу линейного программирования и решаем каким-то известным методом. Ясно, что размерность полученной задачи будет существенно меньшей. Эти обстоятельства еще раз подтверждены при вычислительных экспериментах.

Результаты вычислительных экспериментов обоих методов представлены ниже.

Для того, чтобы оценить погрешности, построенных вышеуказанными методами субоптимистического и субпессимистического значений целевой функции (1) от оптимистического и пессимистического значений, используем следующие формулы:

$$\delta^1_{so.sht} \le \frac{\overline{f}_{op} - f^1_{so.sht}}{\overline{f}_{op}},\ \delta^2_{so.sht} \le \frac{\overline{f}_{op} - f^2_{so.sht}}{\overline{f}_{op}},$$

$$\delta^1_{sp.sht} \le \frac{\overline{f}_{p} - f^1_{sp.sht}}{\overline{f}_{p}},\ \delta^2_{sp.sht} \le \frac{\overline{f}_{p} - f^2_{sp.sht}}{\overline{f}_{p}}.$$

Здесь $\delta^1_{so.sht}$, $\delta^2_{so.sht}$, $\delta^1_{sp.sht}$, $\delta^2_{sp.sht}$ – означают относительные погрешности субоп-тимистического и субпессимистического значений от оптимистического и пессимистического, соответственно для 1-ого и 2-ого подхода,

$\overline{f}_{op}$, $\overline{f}_{p}$ – означают оптимальные значения целевой функции соответствующих задач линейного программирования, т.е. случай $n=0$.

$f^1_{so.sht}$, $f^2_{so.sht}$, $f^1_{sp.sht}$, $f^2_{sp.sht}$ – означают субоптимистические и субпессимис-тические значения целевой функции, полученные подходами 1 и 2 соответственно,

$k_{so.sht}$ и $k_{sp.sht}$ – означают число оставшихся непрерывных переменных при применении вышеизложенного 2-ого подхода для оптимистической и песси-мистической задачи.

4. Результаты вычислительных экспериментов.

Для выявления качества разработанных методов составлены их программы и проведен ряд вычислительных экспериментов над задачами большой размерности. Коэффициенты решённых задач выбраны псевдослучайно двухзначными или трёхзначными числами удовлетворяющие следующим условиям:

I. $0 \le \underline{a}_{ij} \le 99,\ 1 \le \overline{a}_{ij} \le 99,\ 1 \le \underline{c}_j \le 99,\ 1 \le \overline{c}_j \le 99,\ (j=\overline{1,N}).$

II. $0 \le \underline{a}_{ij} \le 999, 1 \le \overline{a}_{ij} \le 999, 1 \le \underline{c}_j \le 999, 1 \le \overline{c}_j \le 999, (j=\overline{1,N}).$

$$\underline{b}_i := \left[\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N} \underline{a}_{ij} \cdot d_j \right],\ \overline{b}_i := \left[\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N} \overline{a}_{ij} \cdot d_j \right].$$

Кроме того, принято $d_j = 10,\ (j=\overline{1,N})$. Результаты проведённых экспериментов представлены в следующих таблицах, где для каждой размерности решены 5 различных задач.

Таблица 1. Результаты решённых задач с двухзначными коэффициентами $(N=500;\ n=300;\ m=10)$.

№	1	2	3	4	5
$\overline{f}_{op}$	229490.527	227378.366	223084.763	224916.745	219829.074
$f^1_{so.sht}$	228690.000	226478.417	222197.000	224412.500	218485.882
$f^2_{so.sht}$	228690.000	226684.546	222197.000	224856.750	218546.732
$\delta^1_{so.sht}$	0.003	0.0039	0.004	0.002	0.006
$\delta^2_{so.sht}$	0.003	0.003	0.004	0.0002	0.0058

$k_{so.sht}$	107	96	92	101	100
$\overline{f}_p$	140399.242	141841.900	139481.812	137560.440	135850.227
$f^1_{sp.sht}$	139740.971	141429.000	138863.509	137004.407	134805.818
$f^2_{sp.sht}$	139845.315	141429.000	138863.509	137446.536	134915.512
$\delta^1_{sp.sht}$	0.005	0.003	0.004	0.004	0.008
$\delta^2_{sp.sht}$	0.004	0.003	0.004	0.000	0.007
$k_{sp.sht}$	142	137	128	135	135

Таблица 2. Результаты решённых задач с двухзначными коэффициентами

$$(N = 1000;\ n = 600;\ m = 10).$$

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\overline{f}_{op}$	459128.212	452971.002	444381.328	450934.920	444367.018
$f^1_{so.sht}$	458288.833	451789.182	443960.361	449902.471	443973.462
$f^2_{so.sht}$	458876.350	451865.322	444010.211	450720.012	444120.010
$\delta^1_{so.sht}$	0.002	0.003	0.001	0.002	0.001
$\delta^2_{so.sht}$	0.0005	0.002	0.000	0.0004	0.0005
$k_{so.sht}$	182	210	192	197	204
$\overline{f}_p$	278280.833	281824.033	280697.887	278230.307	274328.993
$f^1_{sp.sht}$	277755.804	281184.000	280082.765	277519.011	273675.906
$f^2_{sp.sht}$	277982.847	281184.000	280420.356	277954.033	273869.462
$\delta^1_{sp.sht}$	0.002	0.002	0.002	0.003	0.002
$\delta^2_{sp.sht}12$	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001
$k_{sp.sht}$	263	268	259	276	274

Таблица 3. Результаты решённых задач с трёхзначными коэффициентами

$$(N = 500;\ n = 300;\ m = 10).$$

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\overline{f}_{op}$	2078143.461	2048008.113	2011136.079	2036905.014	1996025.589
$f^1_{so.sht}$	2071170.116	2042500.567	2003756.014	2029205.019	1983177.514
$f^2_{so.sht}$	2076170.125	2046500.667	2010756.014	2034205.019	1993477.124
$\delta^1_{so.sht}$	0.003	0.003	0.004	0.004	0.006
$\delta^2_{so.sht}$	0.001	0.001	0.0001	0.001	0.001
$k_{so.sht}$	111	105	94	107	104
$\overline{f}_p$	1415717.044	1428348.507	1398445.814	1383115.720	1364663.837
$f^1_{sp.sht}$	1408712.542	1422700.145	1393925.005	1377361.488	1356291.397
$f^2_{sp.sht}$	1411712.042	1426700.845	1397934.009	1377961.378	1360091.005
$\delta^1_{sp.sht}$	0.005	0.004	0.003	0.004	0.006
$\delta^2_{sp.sht}$	0.002	0.001	0.003	0.0037	0.003
$k_{sp.sht}$	140	134	130	132	136

Таблица 4. Результаты решённых задач с трёхзначными коэффициентами

$(N = 1000;\ n = 600;\ m = 10)$.

№	1	2	3	4	5
$\overline{f}_{op}$	4167732.651	4072629.011	4005598.048	4103210.997	4027310.198
$f^1_{so.sht}$	4160053.202	4062713.080	3998026.463	4094951.490	4016642.963
$f^2_{so.sht}$	4166734.203	4069813.423	4001021.762	4100017.090	4019842.983
$\delta^1_{so.sht}$	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003
$\delta^2_{so.sht}$	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003
$k_{so.sht}$	194	222	204	213	
$\overline{f}_{p}$	2807549.865	2842500.397	2828228.952	2805374.485	2770284.307
$f^1_{sp.sht}$	2798746.855	2833443.984	2820423.270	2795778.143	2765049.000
$f^2_{sp.sht}$	2801546.155	2838443.564	2825421.370	2798978.583	2765049.000
$\delta^1_{sp.sht}$	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002
$\delta^2_{sp.sht}$	0.002	0.001	0.001	0.002	0.002
$k_{sp.sht}$	262	268	260	277	272

5. Выводы. Исходя из вышеуказанных таблиц, можно сделать следующие выводы: Разность субоптимистического и субпессимистического значений задачи (1) –(4), полученная методом в данной работе от оптимистического и пессимистического значений функционала задачи (1)-(4) не велика, а относительные погрешности субоптимистического и субпессимистического значений от оптимистического и пессимистического значений меняется в пределах 0.2-0.6 % и 0.1-0.8% соответственно. С другой стороны, второй подход в большинстве случаев даёт лучшие результаты, чем первый. Однако есть задачи, в которых оба подходы дают одинаковые результаты. Поэтому, учитывая, незначительное компьютерное время для решения конкретной задачи предлагаем применить оба подхода и выбрать из них наилучшее решение из них.

Список Литературы (References)

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления:учебное пособие. Пер. с англ. М, « Мир »:1987.
2. Девятерикова М.В., Колоколов А.А. Алгоритмы перебора L-классов для задачи о рюкзаке с интервальными данными // Преринт. Омск: Ом ГУ. —2001 . — 20 с.
3. Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П. Алгоритмы перебора L-классов для булевой задачи о рюкзаке с интервальными данными // Материалы III Всероссийской конференции “Проблемы оптимизации и экономическое приложение”. — Омск: Изд-во Ом ГТУ, 2006. — С. 87.
4. Emelichev V.A., Podkopaev D.P., Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimitation. — 2010. — № 7 . —P.48-63.
5. Hladik M. On strong optimality of interval linear programming // Optim.Lett . —2017. —11(7).— P.1459-1468
6. Li W., Liu X., Li H., Generalized solutions to interval linear programs and related necessary and sufficient optimality conditions // Optim. Methods Softw . 2015.—30(3) . —P.516-530.
7. Libura M. Integer programming problems with inexact objective function // Control And Cybernetics.— 1980. — Vol. 9, № 4. — P.189-202.
8. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Понятия субоптимистического и субпессимистического решений и построение их в интервальной задаче Булевого программирования // Радиоэлектроника, Информатика, Управление. — 2016. — №3(38), С.99-107.
9. Mamedov K.Sh., Mammadli N.O. Two methods for construction of suboptimistic and subpessimistic solutions of the interval problem of mixed-Boolean programming // Radio Elektronics, Computer Science, Control. — 2018, №3(46). —P.57-67.
10. Mostafaee A., Hladik M., Cerny M. Inverse linear programming with interval coefficients // J.Comput. Appl.Math. —2016. —292:591-608.