

B

Рис.11 Структура внешнего магнитного поля сегментированного тора в плоскости Y' (XZ) в виде графика Кантора.

Показаны сечения поверхностей уровня равной напряженности МП.

Вектор напряженности направлен перпендикулярно плоскости рисунка.

1) И.Е. Тамм // "Основы теории электричества", М, Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1989. с.504.

2) С.Г. Калашников // "Общий курс физики", том 2, государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956.

3) С.Ю. Таскаев // Физика плазмы, сентябрь, 1997, т.23, №12, с.1123; "Динамика потенциалов

при нагреве струи в пробкотроне атомарными пучками".

4) Т.С. Симонен // Физика плазмы, сентябрь, 1997, т.23, №9, с.771; "Устойчивость плазмы с высоким давлением при благоприятной кривизне силовых линий магнитного поля".

5) С.В. Путинский // УФН, ноябрь 1998, т.168, №11, с.1235; "Возможна ли будущая мировая энергетическая система без ядерного синтеза".

6) "Физический энциклопедический словарь", гл. редактор А. М. Прохоров, Москва, "Советская энциклопедия", 1983.

О ПЛОЩАДЯХ РОМБОВ, ВПИСАННЫХ В ЭЛЛИПС ИЛИ ОПИСАННЫХ ВОКРУГ НЕГО

Далингер Виктор Алексеевич

доктор педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и методики обучения математике
Омского государственного педагогического университета, г. Омск

Симонженков Сергей Дмитриевич

кандидат физико-математических наук, доцент
г. Омск

Громов Валентин Алексеевич

кандидат физико-математических наук, доцент
г. Омск

DOI: [10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.61.1](https://doi.org/10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.61.1)

АННОТАЦИЯ.

В статье рассматриваются геометрические задачи на максимум и минимум, которые показывают соотношение площадей ромбов, вписанных в эллипс и описанных около него.

ABSTRACT.

The article discusses the geometric problems of maximum and minimum, which show the ratio of the areas of rhombuses inscribed in an ellipse and described around it.

Ключевые слова: главный вписанный ромб; ромб, вписанный в эллипс; ромб, описанный около эллипса; площади ромбов, вписанных в эллипс и описанных около эллипса.

Keywords: main inscribed rhombus; rhombus inscribed in an ellipse; the rhombus described near the ellipse; the area of the rhombus inscribed in the ellipse and described near the ellipse.

В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.
Л.Эйлер

Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.
П.Л.Чебышев

В координатной плоскости дан эллипс, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b.$$

Пусть A, B, A', B' – вершины эллипса, перечисляемые по ходу движения против часовой стрелки. Ромб с вершинами в этих точках назовем главным вписаным ромбом.

В данной статье решаются следующие задачи.

Задача 1. Среди всех вписанных в эллипс ромбов найти тот, у которого площадь а) наибольшая; б) наименьшая.

Ответ: а) наибольшая площадь у главного ромба, равная $2ab$;

б) наименьшая площадь у вписанного квадрата, равная $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Задача 2. На продолжении большой оси эллипса выбирается некоторая точка C и вокруг эллипса описывается ромб, одна из вершин которого совпадает с точкой C. При каком положении точки C площадь ромба наименьшая?

Ответ: при удаленности точки C от центра эллипса на расстояние $a\sqrt{2}$. Ниже приводятся решения указанных задач, из которых будут ясны приведенные ответы.

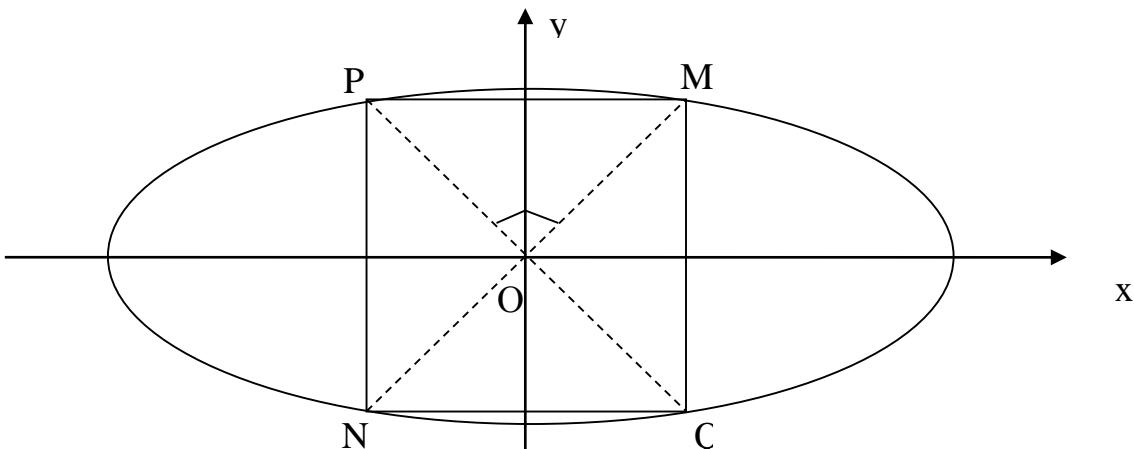


Рис. 1

Решение задачи 1. На дуге AB берем точку M(x,y), $0 \leq x \leq a$ (рис. 1).

Здесь проведена прямая OM и перпендикуляр к ней, проходящий через центр эллипса. Четырехугольник MPNQ – ромб. Пусть x_1, y_1 – координаты точки P. Имеем: $N(-x, -y)$, $Q(-x_1, -y_1)$, площадь ромба $S = \frac{1}{2} MN \cdot PQ = 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Выразим x_1, y_1 через x, y , используя взаимную перпендикулярность векторов OM и OP. Их скалярное произведение равно нулю: $xx_1 + yy_1 = 0 \Rightarrow y^2 y_1^2 = x^2 x_1^2$.

Так как $y_1^2 = b^2(1 - \frac{x_1^2}{a^2})$, то $x_1^2 = \frac{b^2 y^2}{x^2 + \frac{b^2 y^2}{a^2}}$. Тогда $x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2 b^2 (x^2 + y^2)}{a^2 x^2 + b^2 y^2}$, $S = 2ab \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}$.

Подставляя сюда $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, получим площадь как функцию одной переменной $x \in [0, a]$

$$S = 2b \frac{(a^2 - b^2)x^2 + a^2 b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + a^2 b^4}}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум по стандартной методике, зная, что экстремумы достигаются на концах отрезка или в его внутренних стационарных точках.

Найдем производную. Опуская детали, укажем промежуточный результат:

$$S' = \frac{2b(a^2 - b^2)x}{\sqrt{(a^4 - b^4)x^2 + a^2b^4}} \cdot R,$$

Где $R = 2[(a^4 - b^4)x^2 + a^2b^4] - [(a^4 - b^4)x^2 + a^2b^2(a^2 + b^2)]$.

Стационарная точка $x=0$ лежит на границе отрезка, точка $x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ – нуль функции R – является внутренней.

Имеем $S(0) = S(a) = 2ab, S\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Но первая величина – это площадь главного ромба, вторая является площадью квадрата, вписанного в эллипс.

Решение задачи 2. На рис. 2 точка C лежит правее вершины A и проведена касательная CD к дуге AB .

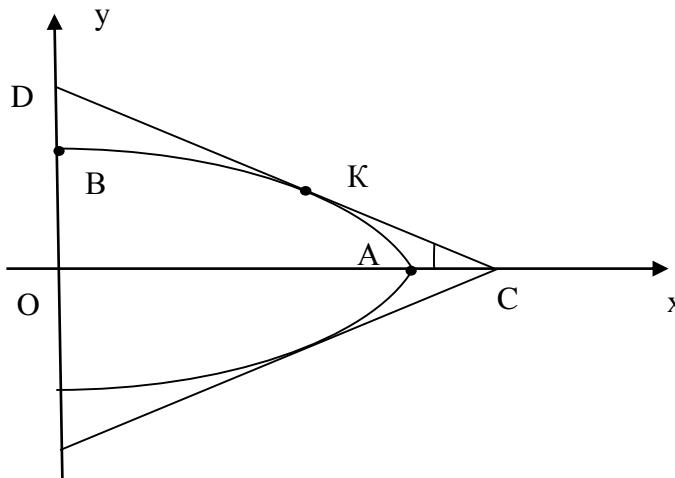


Рис. 2

Пусть α – абсцисса точки C , β – ордината точки D и t – половина угла, под которым виден эллипс из точки C . На рис. 2 этот угол помечен дугой. Тогда $\beta = \alpha \operatorname{tg} t$ и система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{\alpha \operatorname{tg} t} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0) , где x_0, y_0 – это координаты точки касания K . Найдем $y = \alpha \operatorname{tg} t (1 - \frac{x}{2})$ из первого уравнения системы, подставим его во второе. Получим квадратное уравнение

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 t}{b^2}\right)x^2 - 2\alpha \frac{\operatorname{tg}^2 t}{b^2}x + \left(\frac{\alpha^2 \operatorname{tg}^2 t}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Потребуем, чтобы его дискриминант был равен нулю:

$$\frac{4\alpha^2 \operatorname{tg}^4 t}{b^4} - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 t}{b^2}\right)\left(\frac{\alpha^2 \operatorname{tg}^2 t}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Отсюда найдем, что $\alpha \operatorname{tg} t = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t + b^2}$. Площадь описанного ромба $S = \frac{1}{2} \cdot 20C \cdot 20D$ станет функцией угла $t \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$S = 2 \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 t + b^2}{\operatorname{tg} t} = 2 \left(a^2 \operatorname{tg} t + \frac{b^2}{\operatorname{tg} t} \right).$$

В стационарной точке $t_0 = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ функция S имеет минимум, равный $4ab$. При этом абсцисса точки C

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t_0 + b^2}}{\operatorname{tg} t_0} = a\sqrt{2}.$$

При таком удалении от центра эллипса касательная к дуге AB идет параллельно хорде AB .

Площадь описанного квадрата получается при $t = \frac{\pi}{4}$, она равна $2(a^2 + b^2)$, что больше $4ab$.

В нашей работе [3] читатель найдет много интересных прикладных задач на экстремум, которые будут интересны учащимся школ и классов математического профиля.

Литература

- 1) Болтянский В.Г., Яглом И. М. Геометрические задачи на максимум и минимум// Энциклопедия элементарной математики: Книга V. – М.: Наука, 1966. – С. 270-348
- 2) Васильев Б.Н., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – М.: Наука, 1978. – 160 с.

3) Далингер В.А., Симонженков С.Д. Сборник прикладных задач на экстремум: учебное пособие для учащихся школ и классов математического профиля.– Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2007.– 60 с.

4) Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах.– М.: Наука, 1986.– 192с.

DISCRETE PLAYING OF PERSECUTION WITH LEVEL OF BRIGHTNESS OF DIGITAL IMAGE DESCRIBED BY SECOND ORDER EQUATIONS

Mamatov M. Sh.

*National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,
Tashkent 100174, Uzbekistan,
DOI: [10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.61.8](https://doi.org/10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.61.8)*

ABSTRACT.

The work is devoted to the study of a class of discrete pursuit games with a digital image level, which is described by systems of second-order equations. Sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit in discrete games with boundary conditions. When solving the problem of pursuit with the level of a digital image, Chebyshev polynomials of the second kind are used.

Keywords: pursuit, pursuit, evader, terminal set, pursuit control, runaway control

1. INTRODUCTION

The approach of applying a two-dimensional second derivative in the tasks of improving the brightness of a digital image is reduced to the choice of a discrete formulation of the second derivative and to the subsequent construction of a filter mask based on this formulation. Isotropic filters are considered, the response of which does not depend on the direction of inhomogeneities in the image being processed. In other words, isotropic filters are invariant to rotate, in the sense that rotating the image and then applying the filter produces the same result as the initial application of the filter and then rotating the result.

The simplest isotropic operator based on derivatives is the Laplacian (the Laplace operator), which in the case of a function of two variables, is defined as

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Since derivatives of any order are linear operators, then the Laplacian is also a linear operator.

To apply this equation in digital image processing, it must be expressed in a discrete form. There are several ways to set the Laplacian in discrete form based on the values of the neighboring pixels. The following definition of a discrete second derivative is one of the most commonly used formulas. Taking into account that there are two variables and notation $z(x, y)|_{(x_i, y_j)} = z(x_i, y_j) = z_{i,j}$, for the partial second derivative with respect to x , we get

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j)} = z(x_{i+1}, y_j) - 2z(x_i, y_j) + z(x_{i-1}, y_j) = z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}$$

and, similarly for the partial second derivative y , we get

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j)} = z(x_i, y_{j+1}) - 2z(x_i, y_j) + z(x_i, y_{j-1}) = z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}.$$

The discrete formulation of the two-dimensional Laplacian given by (1) is obtained by combining these two components

$$\begin{aligned} \nabla^2 z|_{(x_i, y_j)} &= -4z(x_i, y_j) + [z(x_{i+1}, y_j) + z(x_{i-1}, y_j) + z(x_i, y_{j+1}) + z(x_i, y_{j-1})] = \\ &= -4z_{i,j} + z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1}. \end{aligned}$$