

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.946

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К СМЕШАННО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ*Аббасов Зафар Думан**к.м.н., доц.**Баширова Нурангиз Фируз**к.т.н., ст.преп.**город Гянджа Азербайджанской республики**Гянджинский Государственный Университет (ГГУ)*[DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.4.60.41-45](https://doi.org/10.31618/ESU.2413-9335.2019.4.60.41-45)**APPLICATION OF THE FOURIER METHOD TO THE MIXED BOUNDARY PROBLEM***Abbasov Zafar Duman**c.m.s., as.prof.**Bashirova Nurangiz Firuz**c.t.s. sen.lec.**Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Ganja State University**Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Ganja State University***АННОТАЦИЯ.**

Для определения собственных значений и собственных функций многомерных эллиптических операторов, допускающих разделение переменных, применяется метод Фурье. Метод разделения переменных или метод Фурье, позволяет изучать простейшие процессы, которым сводятся гиперболические, параболические и эллиптические типы уравнений.

ABSTRACT.

The method of disjoint variables or the Fourier method allures us to study simplest processes to which one leads hyperbolic, parabolic and elliptic types of equations. For defining of Eigen values and Eigen functions of multidimensional elliptic operators alluring disjointing of variables if is applied the Fourier method.

Ключевые слова: метод Фурье, граничные задачи, собственные функции, независимые уравнения, краевые и многомерные границы, эллиптические операторы,

Key words: Furry method, border issue, special function, separation equation, frontier and multidimensional border, elliptic operator

Введение. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Метод Фурье позволяет изучать простейшие процессы, которым сводятся гиперболические, параболические и эллиптические типы уравнений.

Как известно, задачу математической физики называют поставленной корректно, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи [1,2,5].

Для определения собственных значений и собственных функций многомерных эллиптических операторов, допускающих разделение переменных, применяется метод Фурье.

Постановка задачи. Пусть независимые переменные разделены на две группы:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ и $\Omega \subset R^k$ - область изменения x и $D \subset R^l$ область изменения y . Обозначим через S и S' границы областей Ω и D соответственно. Тогда $(S \times D) \cup (\Omega \times S')$ есть граница области $\Omega \times D \subset R^{k+l}$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения для уравнения эллиптического типа [3,4]:

$$Lu + Mu = \lambda u \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S \times D} = 0, \quad \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Omega \times S'} = 0 \quad (2)$$

где L и M - эллиптические операторы, не зависящие соответственно от y и x ; функции α , β не зависят от y , а γ , δ не зависят от x [3].

Будем искать собственные функции задачи (1) – (2) в виде произведения

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (3)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем два уравнения:

$$LX = \xi X \quad (4)$$

$$MY = \eta Y \quad (5)$$

где ξ и η неизвестные параметры. Для вывода граничных условий для функций $X(x)$ и $Y(y)$ подставим выражения (4), (5) в равенство (2), в результате имеем:

$$\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (6)$$

$$\gamma Y + \delta \frac{\partial Y}{\partial n} \Big|_{S'} = 0 \quad (7)$$

Итак, краевая задача (1)-(2) распалась на две краевые задачи на собственные значения (4)-(6) и (5)-(7) с меньшим числом независимых переменных.

Обозначим через $\xi_k, X_k(x)$ $k=1, 2, \dots$ и $\eta_j, Y_j(y)$ $j=1, 2, \dots$ все собственные значения и собственные функции операторов L и M соответственно. В силу (3) имеем

$$\lambda_{ij} = \xi_i + \eta_j, u_{ij} = X_i(x)Y_j(y), i, j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Задача 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\lambda u, u|_Q = 0 \quad (9)$$

на собственные значения для прямоугольного параллелепипеда

$$A = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$$

с границей Q .

В соответствие с общей схемой метода Фурье эта задача распадается на три одномерные краевые задачи:

$$X'' = -\xi X, X(0) = X(a) = 0 \quad (10)$$

$$Y'' = -\eta Y, Y(0) = Y(b) = 0 \quad (11)$$

$$Z'' = -\gamma Z, Z(0) = Z(c) = 0 \quad (12)$$

Собственные значения и соответствующие им собственные функции этих краевых задач вычислены (задача Штурма – Лиувилля)

$$\xi_i = \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2, X_i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{i\pi x}{a}, i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$\eta_j = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2, Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{j\pi y}{b}, j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\gamma_k = \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2, Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{k\pi z}{c}, k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Учитывая равенства (13), (14) и (15) в формуле (8) получаем следующие собственные значения и собственные функции краевой задачи (9):

$$\lambda_{ijk} = \pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} \right),$$

$$u_{ijk}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \sin \frac{k\pi z}{c}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

В частности, множество собственных значений $\{\lambda_{ijk}\}$ этой задачи не пусто и не имеет конечных предельных точек; эти собственные значения вещественны и конечной кратности; собственные функции $\{X_i\}, \{Y_j\}, \{Z_k\}$ можно выбрать вещественными и ортонормальными:

$$X_i \in C^2([0, a]), Y_j \in C^2([0, b]), Z_k \in C^2([0, c])$$

Обобщенное решение. Теперь перейдем к доказательству существования решений (1), (2) и (9). Для этого воспользуемся методом Фурье, который заключается в следующем: решение смешанной задачи находится в виде ряда по собственным функциям соответствующей эллиптической краевой задачи.

Пусть $u(x)$ - обобщенная собственная функция первой краевой задачи

$$\operatorname{div}(a\nabla u) - bu = \lambda u, \quad x \in \Omega \quad (17)$$

$$u(x)|_S = 0$$

или третьей ($\sigma = 0$) краевой задачи

$$\operatorname{div}(a\nabla u) - bu = \lambda u, \quad x \in \Omega \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_S = 0$$

Рассмотрим ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему u_1, u_2, \dots, u_k состоящую из всех обобщенных собственных функций задачи (17) или соответственно задачи (18): $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ последовательность соответствующих собственных значений. Кроме того рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = -\lambda u, \quad u|_\Omega = 0 \quad (19)$$

для n - мерного параллелепипеда

$$A = (0; a_1) \times (0; a_2) \times \dots \times (0; a_k)$$

с границей Ω .

В соответствие с общей схемой метода Фурье эта задача распадается на следующие одномерные краевые задачи:

$$X_1'' = -\xi_1 X_1, \quad X_1(0) = X_1(a_1) = 0 \quad (20)$$

$$X_2'' = -\xi_2 X_2, \quad X_2(0) = X_2(a_2) = 0 \quad (20_1)$$

$$X_k'' = -\xi_k X_k, \quad X_k(0) = X_k(a_k) = 0 \quad (20_k)$$

Собственные значения и собственные функции этих краевых задач вычислены (задача Штурма – Ливилля)

$$\xi_{k_1} = \left(\frac{k_1 \pi}{a_1} \right)^2, \quad X_{k_1} = \sqrt{\frac{2}{a_1}} \sin \frac{k_1 \pi x}{a_1}, \quad k_1 = 1, 2, \dots \quad (21_1)$$

$$\xi_{k_2} = \left(\frac{k_2 \pi}{a_2} \right)^2, \quad X_{k_2} = \sqrt{\frac{2}{a_2}} \sin \frac{k_2 \pi x}{a_2}, \quad k_2 = 1, 2, \dots \quad (21_2)$$

$$\xi_{k_n} = \left(\frac{k_n \pi}{a_n} \right)^2, \quad X_{k_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} \sin \frac{k_n \pi x}{a_n}, \quad k_n = 1, 2, \dots \quad (21_n)$$

Из (21₁), (21₂), ..., (21_n) в соответствие с формулами (8) имеем:

$$\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \pi^2 \left(\frac{k_1^2}{a_1^2} + \frac{k_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{k_n^2}{a_n^2} \right) = \pi^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{a_i} \right)^2 \quad (22)$$

В частности множество собственных значений $\{\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n}\}$ этой задачи не пусто и не имеет конечных предельных точек; собственные значения вещественные и конечной кратности; собственные функции $\{X_{k_1}(x)\}, \{X_{k_2}(x)\}, \dots, \{X_{k_n}(x)\}$ можно выбрать, вещественными и ортонормальными:

$$X_1(x) \in C^2([0, a_1]), X_2(x) \in C^2([0, a_2]), \dots, X_n(x) \in C^2([0, a_n])$$

$$\begin{aligned} u_{k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{a_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{a_2} \dots \sin \frac{k_n \pi x_n}{a_n} = \\ &= \left(\frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n \sin \frac{k_i \pi x_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (23)$$

В частности, для n – мерного куба

$$A_k = (0; a) \times (0; a) \times \dots \times (0; a)$$

с границей Ω , собственные значения (22) и соответствующее решение принимает следующий вид:

$$\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} = \pi^2 \left(\frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{a^2} + \dots + \frac{k_n^2}{a^2} \right) = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{i=1}^n k_i^2 \quad (22_i)$$

$$u_{k_1 k_2 \dots k_n} = \left(\frac{2}{a} \right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sin \left(\frac{k_i \pi x_i}{a} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23_i)$$

Асимптотическое поведение собственных значений первой краевой задачи для оператора Лапласа Δ (оператора $L = \operatorname{div}(a\nabla) - b$ при $a \equiv 1, b \equiv 0$) в кубе $K_i = \{0 < x_i < a, i = 1, 2, \dots, n\}$ с ребром $a > 0$ можно дать аналогичным образом. Обобщенная собственная функция $u(x)$ первой краевой задачи для оператора Δ в K_i , отвечающая собственному значению λ , определяется как функция из $H_1(K_i)$ удовлетворяющая при всех \mathcal{G} из $H_1(K_i)$ тождеству

$$\int_{K_i} \nabla u \nabla \mathcal{G} dx = -\lambda \int_{K_i} u \mathcal{G} dx.$$

Заключение. Таким образом, решения корректно поставленных граничных задач для любого уравнения эллиптического типа всегда оказываются не менее гладкими, чем определяющие их функции. Это свойство решений граничных задач тесно связано с тем, что к граничным задачам приводит изучение установившихся (стационарных) физических процессов – равновесий, являющихся конечным результатом предшествующего процесса выравнивания.

Список литературы

1. Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов. Основные дифференциальные уравнение математической физики. Москва, Наука, 1962, 768с.
2. В.П.Михайлов. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва, Наука, 1976, 392с.
3. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1978, 386с.
4. Тихонов А.Н. и Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1977, 736с.
5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1966, 318с.

УДК 535.12 /13 /14

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

Алексеев Николай Васильевич

Канд. техн. наук, нац. исслед. университет МИЭТ, Москва

АННОТАЦИЯ.

Показано, что характер взаимодействия света с веществом не соответствует представлению о свете, как об электромагнитных волнах. С позиции квантовой теории рассмотрены причины уменьшения скорости света в веществе, рассмотрены процессы отражения, преломления и поглощения света.

Ключевые слова: свет, электромагнитные волны, фотоны, эфир, атомы, прозрачная среда, орбиты электронов, отражение, преломление, поглощение.

Попадание света в среду более плотную, чем вакуум, сопровождается уменьшением его скорости. При переходе света из одной среды в другую наблюдаются такие явления, как отражение, преломление и поглощение света. Считая свет упругими поперечными колебаниями эфира, Френель вывел формулы, дающие зависимость амплитуды отраженной и преломленной волн от углов падения и преломления. Его формулы хорошо согласуются с действительностью, но не раскрывают механизма этих явлений.

Классическая волновая теория объясняет эти явления следующим образом. Плоская световая волна вызывает вынужденные колебания атомов на поверхности вещественной среды, которые излучают вторичные сферические волны как в одной, так и в другой среде. Суммируясь, эти волны образуют две новые плоские волны: отраженную и преломленную.

Электромагнитная теория уточняет: на поверхности колеблются не сами атомы, а только их электроны под действием электрической составляющей электромагнитной волны. Они и генерируют вторичные волны. Волны, созданные вынужденными колебаниями электронов одного ряда, практически когерентны, поскольку размеры атомов много меньше длины волны. Такие волны интерферируют и дают суммарную волну точно такой же длины. Интерференция гасит вторичные волны, распространяющиеся во всех направлениях, кроме направлений отражения и преломления. Преломленная волна вызывает колебания электронов в следующем ряду атомов, но там отраженная волна уже не формируется, образуется только проходящая

волна, которая вызывает колебания электронов следующего ряда атомов, и так далее. Так световая волна распространяется в прозрачной среде [5, с.337-338].

Поскольку для смещения электронов требуется некоторое время, каждый ряд атомов создает задержку распространения световой волны, уменьшая ее скорость. Чем плотнее расположены атомы в среде, тем меньше скорость распространения света в ней. Кроме того, поскольку более высокочастотные электромагнитные волны на единицу длины пути совершают больше колебаний, чем низкочастотные, а на каждое ускорение электронов требуется время, высокочастотные волны задерживаются сильнее, чем низкочастотные. Этим и объясняется дисперсия света в веществе.

В случае оптической неоднородности среды в результате наложения несогласованных вторичных волн происходит рассеяние света, которое приводит к снижению интенсивности волны и ее затуханию. Несогласованные колебания электронов, вызванные рассеянными волнами, переходят в тепловые колебания атомов, что и вызывает поглощение света.

В металлах световая волна не распространяется, т.к. свободные электроны не создают вторичных волн, а после поглощения энергии волны приходят в движение, генерируя поверхностные токи, которые вызывают отражение электромагнитной волны. Поэтому коэффициент отражения света металлами много больше, чем диэлектриками.

На самом деле этот механизм распространения света в веществе работать не может. Скорость света в стекле в 1,5 раза меньше, чем в воздухе. Для того, чтобы вторичные волны, были когерентны и могли