НАХОЖДЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Фоменко В. Н.,
Шварц М. А.
DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.59.54-59

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье методом разделения переменных Фурье находится решение уравнения Лапласа для полых цилиндров, до сих пор не опубликованное в литературе. Для уравнения Бесселя решена краевая задача на отрезке $0 < R_1 \le r \le R_2$. Обсуждается связь полученного решения с проблемой Штурма-Лиувилля. Предложен метод нахождения решения для тел с осевой симметрией, составленных из нескольких сплошных и полых цилиндров, путем сопряжения потоков потенциала (потоков электрической и магнитной индукции, тепловых потоков) на границе цилиндрических элементов. Метод сопряжения потоков протестирован для полого цилиндра, рассмотренного как система 4 полых цилиндров.

1.Введение

Уравнение Лапласа

$$\nabla^2\Theta(x,y,z)=0$$

играет фундаментальную роль в таких разделах физики как электро- и магнитостатика, гидродинамика, физика тепловых процессов, квантовая механика и др. [5,7]. Наряду с численными методами для решения этого уравнения широко применяется метод разделения переменных Фурье. Применимость этого метода существенно зависит от формы области, в которой ищется решение. В частности, хорошо известно решение для цилиндрической области. Тем не менее, решение уравнения Лапласа для полой цилиндрической области в литературе не обнаружено.

В данной работе в разделе 2 методом Фурье строится решение уравнения Лапласа, обладающее осевой симметрией, для сплошного и полого цилиндра. В разделе 3 обсуждается связь решаемой задачи с проблемой Штурма-Лиувилля [3,6], которая обосновывает существование и единственность найденного решения.

В разделе 4 предложенный метод обобщается на случай осесимметричной системы однородных цилиндров с различающимися показателями проницаемости среды, такими как диэлектрическая или магнитная проницаемости, теплопроводность, электропроводность (в зависимости от физической интерпретации уравнения Лапласа).

2.Построение решения уравнения Лапласа

Уравнение Лапласа для решений с осевой симметрией имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta(r,z)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Theta(r,z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Theta(r,z)=0$$

В данной работе это уравнение решается для областей, изображенных на рис. 1 и 2. На рисунках показаны и граничные условия.

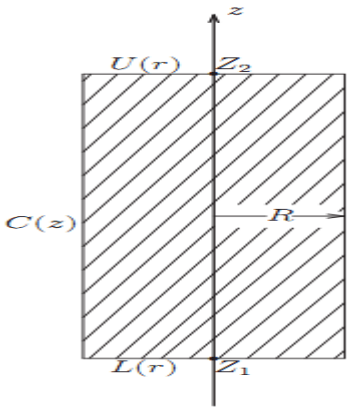

Рис. 1

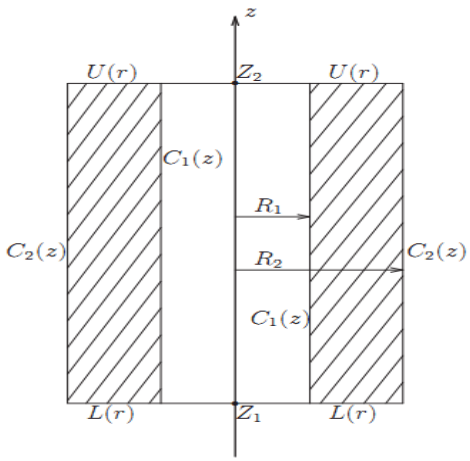

Рис. 2

Ниже строятся решения уравнения Лапласа на основе метода разделения переменных Фурье [3,4,8]. Мы опускаем детали вывода.

В дальнейшем индекс «1» присвоен выравнивающим решениям, а индекс «0» - приведенным. Выравнивающие решения служат для того, чтобы обеспечить нулевые значения приведенных решений на пересечениях цилиндрических и плоских границ цилиндра. Для сплошного цилиндра это два условия, а для полого – четыре.

Решения $\Theta_s(r,z)$ для сплошного цилиндра представлены равенствами (1-3):

$$\Theta_{s1}(r,z)=\frac{U(R)-L(R)}{H}(z-Z_1)+L(R) \tag{1}$$

$$\Theta_{s0}(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{Ck}\frac{I_0(\frac{k\pi r}{H})}{I_0(\frac{k\pi R}{H})}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}D_{Lk}J_0\left(\kappa_k\frac{r}{R}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\kappa_k(Z_2-z)}{R}\right)}{\sinh\left(\frac{\kappa_k H}{R}\right)}+\sum_{k=1}^{\infty}D_{Uk}J_0\left(\kappa_k\frac{r}{R}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\kappa_k(z-Z_1)}{R}\right)}{\sinh\left(\frac{\kappa_k H}{R}\right)} \tag{2}$$

Здесь J_0 −функция Бесселя, а I_0 −модифицированная функция Бесселя первого рода[1,2].
Решение для сплошного цилиндра дается формулой

$$\Theta_s(r,z)=\Theta_{s0}(r,z)+\Theta_{s1}(r,z) \tag{3}$$

Величины D определяются граничными условиями

$$C(z)-\Theta_{s1}(R,z)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{Ck}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right)$$
$$L(r)-\Theta_{s1}(r,Z_1)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{Lk}J_0\left(\kappa_k\frac{r}{R}\right)$$
$$U(r)-\Theta_{s1}(r,Z_2)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{Uk}J_0\left(\kappa_k\frac{r}{R}\right)$$

Решения $\Theta_h(r,z)$ для полого цилиндра представлены равенствами (4-6):

$$\Theta_{h1}(r,z)=C+C_{\log}\ln(r)+C_z z+C_{\log z}z\cdot\ln(r) \tag{4}$$

В формуле (4) параметры $C,\ C_{\log},\ C_z,\ C_{\log z}$ определяются следующим образом

$$C_{\log z}=\frac{U(R_2)-U(R_1)-(L(R_2)-L(R_1))}{H\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)};$$
$$C_z=\frac{U(R_1)-L(R_1)}{H}-C_{\log z}\ln(R_1) \tag{4'}$$
$$C_{\log}=\frac{L(R_2)-L(R_1)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}-C_{\log z}Z_1$$
$$C=L(R_1)-C_z Z_1-C_{\log}\ln(R_1)-C_{\log z}Z_1\ln(R_1)$$

Ниже дано приведенное решение для полого цилиндра

$$\Theta_{h0}(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{C1k}\frac{\frac{I_0(\frac{k\pi r}{H})}{I_0(\frac{k\pi R_2}{H})}-\frac{K_0(\frac{k\pi r}{H})}{K_0(\frac{k\pi R_2}{H})}}{\frac{I_0(\frac{k\pi R_1}{H})}{I_0(\frac{k\pi R_2}{H})}-\frac{K_0(\frac{k\pi R_1}{H})}{K_0(\frac{k\pi R_2}{H})}}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}D_{C2k}\frac{\frac{I_0(\frac{k\pi r}{H})}{I_0(\frac{k\pi R_1}{H})}-\frac{K_0(\frac{k\pi r}{H})}{K_0(\frac{k\pi R_1}{H})}}{\frac{I_0(\frac{k\pi R_2}{H})}{I_0(\frac{k\pi R_1}{H})}-\frac{K_0(\frac{k\pi R_2}{H})}{K_0(\frac{k\pi R_1}{H})}}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}D_{Lk}Z_0\left(\beta_k,\tilde{\kappa}_k\frac{r}{R_1}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\tilde{\kappa}_k(Z_2-z)}{R_1}\right)}{\sinh\left(\frac{\tilde{\kappa}_k H}{R_1}\right)} \qquad (5)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}D_{Uk}Z_0\left(\beta_k,\tilde{\kappa}_k\frac{r}{R_1}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\tilde{\kappa}_k(z-Z_1)}{R_1}\right)}{\sinh\left(\frac{\tilde{\kappa}_k H}{R_1}\right)}$$

Здесь K_0 – модифицированная функция Бесселя 2-го рода [1,2].
Решение для полого цилиндра дается формулой

$$\Theta_h(r,z)=\Theta_{h0}(r,z)+\Theta_{h1}(r,z)\,, \qquad (6)$$

где введена новая функция Бесселя как суперпозиция функций Бесселя 1-го и 2-го рода:

$$Z_0(\beta,x)=(1-\beta)J_0(x)+\beta Y_0(x) \qquad (7)$$

Пусть $\hat{\kappa}_n(\beta)$–*n*-ый в порядке возрастания корень функции (7). Величина β в формуле (7) выбирается как решение уравнения

$$\frac{\hat{\kappa}_{n+k}(\beta_k)}{\hat{\kappa}_n(\beta_k)}=\frac{R_2}{R_1} \qquad (8)$$

при некотором значении *n*. Существование и единственность решения уравнения (8) следует из того, что $Z_0(\beta,x)$ – решение регулярной задачи Штурма-Лиувилля (см. раздел 3). В уравнении (5) $\tilde{\kappa}_k=\hat{\kappa}_n(\beta_k)$. Функция $Z_0\left(\beta_k,\tilde{\kappa}_k\frac{r}{R_1}\right)$ имеет *k-1* корень внутри промежутка (R_1,R_2).

Величины D определяются граничными условиями

$$C_1(z)-\Theta_{h1}(R_1,z)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{C1k}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right)$$

$$C_2(z)-\Theta_{h1}(R_2,z)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{C2k}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right)$$

$$L(r)-\Theta_{h1}(r,Z_1)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{Lk}Z_0\left(\beta_k,\tilde{\kappa}_k\frac{r}{R_1}\right)$$

$$U(r)-\Theta_{h1}(r,Z_2)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{Uk}Z_0\left(\beta_k,\tilde{\kappa}_k\frac{r}{R_1}\right)$$

3.Связь с задачей Штурма- Лиувилля

Остановимся на связи функции $Z_0\left(\beta_k, \tilde{\kappa}_k \frac{r}{R_1}\right)$, введенной в данной работе, с регулярной задачей Штурма - Лиувилля [3,6], которая формулируется как краевая задача для уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) = -\lambda w(x)y(x) \quad , \tag{9}$$

где $w(x) > 0$, $p(x) > 0$ и $p(x),\ p'(x),\ q(x),\ w(x)$ непрерывные функции на некотором конечном интервале $[a,b]$, а граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad (\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 > 0) \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 > 0) \end{aligned},$$

В этом случае справедливы утверждения:

- Существуют действительные собственные числа $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \to \infty$
- Каждому λ_n соответствует единственная (с точностью до нормировки) собственная функция $y_n(x)$, которая имеет $n-1$ корень внутри (a,b).
- Функции $y_n(x)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2([a,b], w(x)\,dx)$.

Функции $Z_0\left(\beta_k, \tilde{\kappa}_k \frac{r}{R_1}\right)$ удовлетворяют уравнению Бесселя [4,6]

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}Z_0\left(\beta_k, \tilde{\kappa}_k \frac{r}{R_1}\right)\right] = -\frac{\tilde{\kappa}_k{}^2}{R_1{}^2}\cdot r \cdot Z_0\left(\beta_k, \tilde{\kappa}_k \frac{r}{R_1}\right), \tag{10}$$

Из сравнения уравнений (9) и (10) следует, функции $Z_0\left(\beta_k, \tilde{\kappa}_k \frac{r}{R_1}\right)$ – решения регулярной задачи Штурма-Лиувилля и поэтому образуют базис в пространстве L_2 и ортогональны на отрезке $[R_1, R_2]$ с весом r.

4.Описание составных систем

Покажем, как можно применить полученное решение к системам с осевой симметрией, составленным из нескольких полых и сплошных цилиндров. Рассмотрим полый неоднородный цилиндр, осевое сечение которого изображено на рис. 3 и который составлен из четырех однородных полых цилиндров, пронумерованных на рисунке.

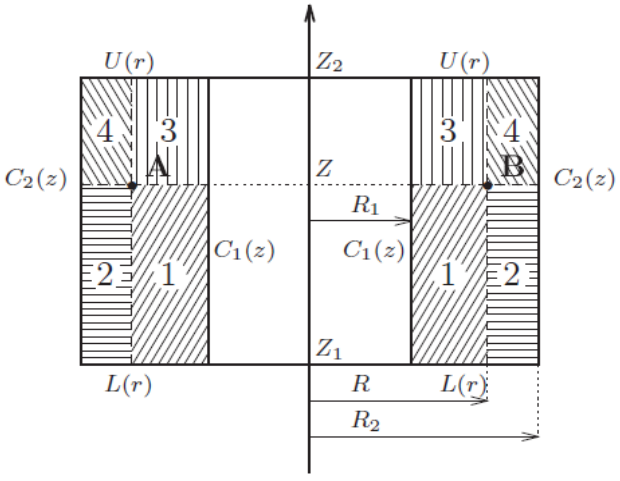

Рис. 3

Каждый из цилиндров имеет свое, одинаковое для всех точек цилиндра, значение проницаемости среды λ (диэлектрическая проницаемость, теплопроводность и пр.). Следовательно, плотность потока потенциального поля равна $-\lambda\nabla\Theta(r,z)$.

Величины $D_{C1k}{}^{(1)}$, $D_{C1k}{}^{(3)}$, $D_{C2k}{}^{(2)}$, $D_{C2k}{}^{(4)}$ и $D_{Lk}{}^{(1)}$, $D_{Lk}{}^{(2)}$, $D_{Uk}{}^{(3)}$, $D_{Uk}{}^{(4)}$–коэффициенты разложения для выравненных граничных условий (верхний индекс указывает на номер цилиндра). Например,

$$C_1(z)-\Theta_{h1}{}^{(1)}(R_1,z)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{C1k}{}^{(1)}\sin\left(\frac{k\pi(z-Z_1)}{H}\right),\ Z_1\le z\le Z$$

Выравнивающее решение для цилиндра 1 имеет вид

$$\Theta_{h1}{}^{(1)}(r,z)=C^{(1)}+C_{\log}{}^{(1)}\ln(r)+C_z{}^{(1)}z+C_{\log z}{}^{(1)}z\cdot\ln(r),$$

где

$$C_{\log z}{}^{(1)}=\frac{T_C-C_1(Z)-(L(R)-L(R_1))}{(Z-Z_1)\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)};$$

$$C_z{}^{(1)}=\frac{C_1(Z)-L(R_1)}{Z-Z_1}-C_{\log z}{}^{(1)}\ln(R_1)$$

$$C_{\log}{}^{(1)}=\frac{L(R)-L(R_1)}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}-C_{\log z}{}^{(1)}Z_1$$

$$C^{(1)}=L(R_1)-C_z{}^{(1)}Z_1-C_{\log}{}^{(1)}\ln(R_1)-C_{\log z}{}^{(1)}Z_1\ln(R_1)$$

T_C–потенциал на окружности $(r=R;\ z=Z)$, расположенной на пересечении всех четырех цилиндрических блоков (окружность пересекает плоскость рис. 3 в точках A и B).

Величины

$$D_{Uk}{}^{(1)}=D_{Lk}{}^{(3)}=D_k{}^{(13)};$$
$$D_{Uk}{}^{(2)}=D_{Lk}{}^{(4)}=D_k{}^{(24)};$$
$$D_{C2k}{}^{(1)}=D_{C1k}{}^{(2)}=D_k{}^{(12)};$$
$$D_{C2k}{}^{(3)}=D_{C1k}{}^{(4)}=D_k{}^{(34)}$$

задают разложения на границах между блоками и являются свободными переменными, так же, как и T_C.

Пусть n_{r1} число членов в разложении на границе 1-3, n_{r2} та же величина на границе 2-4, n_{z1} для границы 1-2 и n_{z2} для 3-4. Объединим переменные $D_k{}^{(12)}$, $D_k{}^{(13)}$, $D_k{}^{(24)}$, $D_{C2k}{}^{(34)}$, T_C в вектор $\tilde{D}_k$ длины $N=n_{r1}+n_{r2}+n_{z1}+n_{z2}+1$. Компоненты $\tilde{D}_k$ выбираются из условия равенства плотности потоков на границах между блоками. Пусть $P_m(r_m,\ z_m,\ \phi_m)$–совокупность M точек на поверхностях сопряжения и $\Gamma1_m<\Gamma2_m$–номера блоков, граничащих в точке P_m. Тогда $\tilde{D}_k$ получаются как решение задачи

$$\min_{\tilde{D}_k}\sum_{m=1}^{M}\left[\lambda_{\Gamma1_m}\frac{\partial}{\partial n}\Theta_h{}^{(\Gamma1_m)}-\lambda_{\Gamma2_m}\frac{\partial}{\partial n}\Theta_h{}^{(\Gamma2_m)}\right]^2,\qquad(11)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}\quad \textit{для границ}\ 1-2\ \textit{и}\ 3-4$$
$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial z}\quad \textit{для границ}\ 1-3\ \textit{и}\ 2-4$$

Очевидно, потенциал и его производные в фиксированной точке –линейная функция $\tilde{D}_k$. Поэтому

$$\lambda_{\Gamma 1_m}\frac{\partial}{\partial l}\Theta_h^{(\Gamma 1_m)}-\lambda_{\Gamma 2_m}\frac{\partial}{\partial l}\Theta_h^{(\Gamma 2_m)}=c_{m0}+\sum_{k=1}^{N}c_{mk}\tilde{D}_k$$

Обозначим через A фрагмент матицы C^TC, из которой удалены левый столбец и верхняя строка, а через B −левый столбец без верхнего элемента:

$$a_{ik}=\sum_{m=1}^{M}c_{mi}c_{mk};\ b_i=\sum_{m=1}^{M}c_{mi}c_{m0};\ i,k=1,\ldots,N$$

Решение задачи (11) дается формулой

$$\tilde{D}=-A^{-1}B$$

Точность предложенного метода сопряжения блоков проверена для системы рис. 3 в предположении $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$. В этом случае вся система представляет собой однородный полый цилиндр, и решение может быть найдено непосредственно. При сравнении решений, полученных с разбиением системы на блоки и без него, обнаружены отклонения не более 0,1%.

В расчетах использованы разложения в ряды Фурье и Бесселя-Фурье с 10 членами для каждой из 4 границ. При сопряжении потоков на каждом участке были взяты по 20 точек (M=80). Радиусы цилиндров приняты равными $R_1=2;\ R_2=3;\ R_3=5$. Высоты цилиндров равны $Z-Z_1=2;\ Z_2-Z=3$.

5.Заключение

В предположении осевой симметрии получено решение уравнения Лапласа для полых цилиндрических тел, а также для системы, построенной из таких тел. Данный метод интересен не только с теоретической точки зрения, но и позволяет решить многие прикладные технические задачи в различных областях. В частности, в строительстве и реконструкции объектов метрополитена, шахт, водопропускных сооружений и т.п. на стадии проектирования появляется возможность проанализировать различные аварийные ситуации и сэкономить средства при эксплуатации сооружений.

Изложенный метод может быть обобщен и на случай, когда не предполагается осевая симметрия для решения и граничных условий.

Литература

1) Балакин А.Б. Лекции по теории функций Басселя. Казань, 2009.

2) Ватсон Дж. Н. Теория Бассеелвых функций. Москва, И.Л., 1949.

3) Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. И.Л., 1958.

4) Смирнов В.И. Курс высшей математики т. II. «Наука», 1967.

5) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. «Наука», 1972.

6) Титчмарш Э.И. Разложения по собственным функция, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1-2. И.Л., 1960, 1961.

7) Шварц Л. Математические методы для физических наук, «Мир», 1695.

8) Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Москва, 2002.

9) Янке Е., Эмде Ф., Леш М. Специальные функции, формулы, графики, таблицы. «Наука», 1977.

ФОМЕНКО Виктор Николаевич – д. ф.-м.н. наук, профессор (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I), vfomenko1943@gmail.com; Шварц Михаил Александрович – кандидат техн. наук, доцент, (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I), shvarts4545@mail.ru.