5. А.Г.Алексеев, Н.А.Карпов/ Результаты практического использования термолюминенсцентных детекторов на основе LiF-Mg,Cu,P в дозиметрии g -, b -, n- излучений/ в журнале АНРИ №2, 2002, стр. 51-54

6. A.G. Alexeev, E.V. Altuhova, I.I. Degtarev, V.A. Pikalov, O.V. Sumaneev, A.A. Yanovich, F.N.Novoskoltsev Methodical Issues of the use of Detectors for Dosimetry in Beams of the Carbon nuclei of the Accelerator U-70 Proceedings of RuPAC2018, Protvino, Russia, pp.394-396, 2018. http://accel-conf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2018

ДИСКРЕТНО-ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Садыгов И.М.
научный сотрудник
Институт Экономики НАН Азербайджана
Азербайджан, г. Баку

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.59.47-53

АННОТАЦИЯ.

В работе введены дискретно-выпуклое множество, дискретно-выпуклая функция и изучен ряд их свойств. В работе получены критерии дис-кретно-выпуклости функций.

ANNOTATION.

In this paper we introduce the notions of a discretely convex set, a discretely convex function and we study some their properties. Criteria for discrete convexity of functions are obtained.

Ключевые слова: дискретно-выпуклое множество, дискретная функция, выпуклая функция.

Keywords: discretely convex set, discrete function, convex function.

1. Дискретно-выпуклая функция

Дискретная функция, как частный случай функций, отдельно немало изучена. Но ряд понятие, например выпуклость для дискретных функций не изучены. Дело в том, что область определения выпуклых функций выпуклое множество, а область определения дискретных функций не выпуклое множес-тво. В работах [1] и [2] в конечномерном пространстве введены дискретно-выпуклое множество, дискретно-выпуклая функция и изучен ряд их свойств. В данной работе в пространстве R^∞ рассматриваются дискретно-выпуклое мно-жество, дискретно-выпуклая функция и изучен ряд их свойств.

Пусть R^∞ множество всевозможных числовых последовательностей $x=(x_1,\dots,x_k,\dots)$ (см.[3]). Через Z обозначим множество целых чисел. Положим $Z^\infty = Z\times\cdots\times Z\times\cdots$.

Определение 1. Если $C\subset R^\infty$ выпуклое множество, то множество $C\bigcap Z^\infty$ назовем дискретно-выпуклым множеством в Z^∞.

Считаем, что пустое множество дискретно-выпуклое множество.

Определение 2. Если $C\subset R^\infty$ выпуклое множество, $B=C\bigcap Z^\infty$, $f:C\to R$ выпуклая функция, то функцию $f:B\to R$ назовем дискретно-выпуклой функцией. Через $\mathrm{co}B$ обозначим выпуклую оболочку множества $B\subset R^\infty$ (см.[4],[5]).

Лемма 1. Множество $B\subset Z^\infty$ дискретно-выпукло, тогда и только тогда, когда $B=\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty$.

Доказательство. Если $B=\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty$, то по определению имеем, что B дискретно-выпуклое множество в Z^∞

Обратно, если B дискретно-выпуклое множество в Z^∞, то существуют выпуклое множество $C\subset R^\infty$ такое, что $B=C\bigcap Z^\infty$. Так как $B\subset C$ и $B\subset Z^\infty$, то имеем, что $\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty\subset C\bigcap Z^\infty\subset B\bigcap Z^\infty$, т.е. $\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty\subset B\bigcap Z^\infty$. Очевидно, что $B\bigcap Z^\infty\subset \mathrm{co}B\bigcap Z^\infty$. Тогда имеем, что $B=B\bigcap Z^\infty=\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty$, т.е. $B=\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty$. Лемма доказана.

Если $x_1,x_2\in R^\infty$, то обозначим $[x_1,x_2]=\{x\in R^\infty : x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda\in[0,1]\}$.

Лемма 2. Множество $B\subset Z^\infty$ дискретно-выпукло, тогда и только тогда, когда из $x_1,x_2\in \mathrm{co}B$ следует, что $[x_1,x_2]\bigcap Z^\infty\subset B$.

Доказательство. Если B дискретно-выпуклое множество в Z^∞, то по лемме 1 имеем, что $B=\mathrm{co}B\bigcap Z^\infty$. Пусть $x_1,x_2\in \mathrm{co}B$. Так как $[x_1,x_2]\in \mathrm{co}B$, то имеем, что $[x_1,x_2]\bigcap Z^\infty\subset \mathrm{co}B\bigcap Z^\infty = B$. Отсюда следует, что $[x_1,x_2]\bigcap Z^\infty\subset B$.

Обратно пусть из $x_1, x_2 \in coB$ следует, что $[x_1, x_2] \bigcap Z^\infty \subset B$. Тогда из $z \in coB \bigcap Z^\infty$ имеем, что $z \in B$, т.е. $coB \bigcap Z^\infty \subset B$. Так как $B \subset Z^\infty$, то имеем $coB \bigcap Z^\infty \subset B \bigcap Z^\infty$. Так как $B \bigcap Z^\infty \subset coB \bigcap Z^\infty$, то имеем, что $B = B \bigcap Z^\infty = coB \bigcap Z^\infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. Множество $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпукло, тогда и только тогда, когда из $\alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \ x_1, \cdots, x_k \in B, \ x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in Z^\infty, \ k \in N,$ следует, что $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in B.$

Доказательство. Если B дискретно-выпуклое множество в Z^∞, то по лемме 1 имеем, что $B = coB \bigcap Z^\infty$. Поэтому из $\alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \ x_1, \cdots, x_k \in B, \ x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in Z^\infty$ следует, что $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in B.$

Обратно пусть из $x_1, \ldots, x_k \in B, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in Z^\infty$ следует, что $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in B$ и пусть $z \in coB \bigcap Z^\infty$. Так как $z \in coB$, то существуют $z_1, \ldots, z_k \in B, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ такие, что $z = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i$. Так как $z \in Z^\infty$, то имеем, что $z = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i \in B.$ Поэтому $coB \bigcap Z^\infty \subset B$. Так как $B \subset Z^\infty$, то имеем $coB \bigcap Z^\infty \subset B \bigcap Z^\infty$. Ясно, что $B \bigcap Z^\infty \subset coB \bigcap Z^\infty$. Тогда имеем, что $B = B \bigcap Z^\infty = coB \bigcap Z^\infty$. Лемма доказана.

Если B дискретное множество в Z^∞ и $f : B \to R,$ то положим

$$(conv\ f)(x) = \inf\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) : \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \ x_i \in B \ \text{при} \ i = \overline{1,k}, \ k \in N\}$$

при $x \in coB$.

Лемма 4. Если $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, то $f : B \to R$ дискретно выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $f(x) = (conv f)(x)$ при $x \in B$.

Доказательство. Пусть $f : B \to R$ дискретно-выпуклая функция. Тогда по определению дискретно-выпуклой функции существует выпуклая функция $g : coB \to R$ такая, что $g(x) = f(x)$ при $x \in B$. По определению $(conv f)(x)$ имеем, что $g(x) \leq (conv f)(x) \leq f(x)$ при $x \in B$. Отсюда следует, что $f(x) = (conv f)(x)$ при $x \in B$.

Обратно, если $f(x) = (conv f)(x)$ при $x \in B$, то по определению имеем, что $f : B \to R$ дискретно-выпуклая функция. Лемма доказана.

Теорема 1. Если $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, то функция $f : B \to R$ дискретно-выпуклая функция, в том и только в том случае, когда

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) \tag{1}$$

при $x_1, \cdots, x_k \in B, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in B,$ где $k \in N$.

Доказательство. Пусть $f : B \to R$ дискретно-выпуклая функция. Тогда по лемме 4 имеем, что $f(x) = (conv f)(x)$ при $x \in B.$ Так как для любого $x_1, \cdots, x_k \in B, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ выполняется неравенство

$$(conv\ f)(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (conv\ f)(x_i),$$

то отсюда следует

$$f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i) \text{ при } x_1,\cdots,x_k \in B,\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1 \text{ и } \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in B.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть $x \in B$. Возьмем

$$x_1,\cdots,x_k \in B,\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1 \text{ такие, что } x = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i.$$

Тогда из (1) следует, что

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i).$$

Поэтому имеем, что

$$(conv\, f)(x) = \inf\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i) : \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i,\ x_i \in B,\ i = \overline{1,k},\ k \in N\} \ge f(x)$$

при $x \in B$. Так как $(\mathrm{conv} f)(x) \le f(x)$, то имеем, что $f(x) = (\mathrm{conv} f)(x)$ при $x \in B$. Тогда из леммы 4 имеем, что $f : B \to R$ дискретно-выпуклая функция. Теорема доказана.

Пусть $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $f : B \to R$ дискретно-выпуклая функция. Тогда по определению $\mathrm{conv} f : \mathrm{co} B \to R$ выпуклая функция. Поэтому

$$(conv\, f)(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha(conv\, f)(x) + (1-\alpha)(conv\, f)(y)$$

при $\alpha \in [0,1]$, $x, y \in \mathrm{co} B$. Отсюда следует, что

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha\, f(x) + (1-\alpha)\, f(y)$$

при $\alpha \in [0,1]$, $x, y \in B$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in B$.

Определение 3. Если $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $\mathrm{conv} f : \mathrm{co} B \to R$ строго выпуклая функция и $f(x) = (\mathrm{conv} f)(x)$ при $x \in B$, то функцию $f : B \to R$ назовем строго дискретно-выпуклой функцией.

Если $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $(-f) : B \to R$ дискретно-выпуклая функция, то функцию $f : B \to R$ назовем дискретно-вогнутой.

Если $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $D \subset B$, $D + (0,\cdots,0,1,0,\cdots) \subset B$ и $D - (0,\cdots,0,1,0,\cdots) \subset B$ при всех $(1,0,0,\cdots),\cdots,(0,\cdots,0,10,\cdots)$ n-единичных векторов, где $n \in N$, то множество D назовем $n-$дискретно-открытым подмножеством множества B.

Если $f : B \to R$, $x = (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\cdots)$, $x = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i \pm 1,x_{i+1},\ldots,x_n,x_{n+1},\cdots) \in B$ при $i = 1,2,\ldots,n$, $n \in N$, то положим

$$\Delta_i^+(n)f(x) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+1,x_{i+1},\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots) - f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\cdots),$$
$$\Delta_i^-(n)f(x) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i-1,x_{i+1},\ldots,x_n,x_{n+1},\cdots) - f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\cdots),$$

при $i = 1,2,\ldots,n$, $n \in N$,

$$\Delta^+(n)f(x) = (\Delta_1^+(n)f(x),\ldots,\Delta_n^+(n)f(x),0,\cdots),$$
$$\Delta^-(n)f(x) = (\Delta_1^-(n)f(x),\ldots,\Delta_n^-(n)f(x),0,\cdots).$$

Теорема 2. Пусть $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $D \subset B$ n - дискретно открыто выпуклое подмножество множества B, где $n \in N$, и дискретная функция $f : B \to R$ удовлетворяет условию

$$f(y) - f(x) \ge \left\langle \Delta^+(n)f(x), y - x \right\rangle \tag{2}$$

при $x, y \in D,$ где $x = (x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \cdots)$, $y = (y^1, \ldots, y^m, y^{m+1}, \cdots)$, то

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$$

при $x_1, \cdots, x_k \in D,$ $\alpha_i \ge 0,$ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in D$, $k \in N.$

Доказательство. Пусть $x_1, \cdots, x_k \in D,$ $\alpha_i \ge 0,$ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = x \in D.$ Тогда из (2) имеем, что

$$f(x_i) - f(x) \ge \left\langle \Delta^+(n) f(x), x_i - x \right\rangle \tag{3}$$

при $i = 1, 2, \ldots, k.$ Умножая соотношение (3) на α_i и складывая их получим

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (f(x_i) - f(x)) \ge \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left\langle \Delta^+(n) f(x), x_i - x \right\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (f(x_i) - f(x)) \ge \left\langle \Delta^+(n) f(x), \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i - x \right\rangle,$$

т.е. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) - f(x) \ge 0$ при $x_1, \cdots, x_k \in D,$ $\alpha_i \ge 0,$ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in D.$

Поэтому

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) \text{ при } x_1, \cdots, x_k \in D, \ \alpha_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \text{ и } x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in D.$$

Теорема доказана.

Если $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $D \subset B$ n-дискретно открыто выпуклое подмножество множества B и дискретная функция $f : B \to R$ удовлетворяет условию (2) при $x, y \in D,$ то из теоремы 2 следует, что $f : D \to R$ дискретно выпуклая функция.

Следствие 1. Пусть $B \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество, $D \subset B$ $n-$дискретно открыто выпуклое подмножество множества B и дискретная функция $f : B \to R$ удовлетворяет условию

$$f(y) - f(x) \ge \left\langle \Delta^+(n) f(x), y - x \right\rangle$$

при $x, y \in D,$ то

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

при $x_1, x_2 \in D,$ $\alpha_1 \ge 0,$ $\alpha_2 \ge 0,$ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D$.

Следствие 2. Пусть $D \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество и существует $n \in N$ такое, что дискретная функция $f : Z^\infty \to R$ удовлетворяет условию $f(y) - f(x) \ge \left\langle \Delta^+(n) f(x), y - x \right\rangle$ при $x, y \in D,$ то $f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$ при $\alpha_i \ge 0,$ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ $x_1, \cdots, x_k \in D$ и $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in D,$ $k \in N.$

2. Некоторые свойства дискретно-выпуклой функции

Пусть $C \subset Z^\infty$ дискретно-выпуклое множество и $f : C \to Z$.

Лемма 5. Если $C_i \subset Z^\infty$, $i \in I,$ дискретно-выпуклые множества, то $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ дискретно-выпуклое множество.

Доказательство. Пусть $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, x_2, \ldots, x_k \in \bigcap_{i\in I} C_i$ и $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in Z^\infty$. Отсюда следует, что $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, x_2, \ldots, x_k \in C_i$ и $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in Z^\infty$. Тогда из леммы 3 имеем, что $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in C_i$ при $i \in I$. Поэтому $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in C$ при $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$ и $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in Z^\infty$. По лемме 3 получим, что C дискретно-выпуклое множество. Лемма доказана.

Теорема 3. Если $f_s(x),\ s = 1, \ldots, m,$ дискретно-выпуклые функции на дискретно-выпуклом множестве C, то $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_m(x)$ дискретно-выпуклая функция на множестве C.

Доказательство. По лемме 3 f_s дискретно-выпуклая функция на множестве C в том и только в том случае, когда $f_s(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_s(x_i)$ при $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, \cdots, x_k \in C,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in C,\ k \in N.$

Поэтому

$$f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) = f_1(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) + \cdots + f_m(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_1(x_i) + \cdots + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_m(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i (f_1(x_i) + \cdots + f_m(x_i)) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i)$$

при $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, \cdots, x_k \in C,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in C,\ k \in N,$ т.е. $f(x)$ дискретно-выпуклая функция на множестве C.

Второе доказательство. Так как $f_s : C \to R,\ s = 1, \ldots, m,$ дискретно-выпуклые функции, то по лемме 4 имеем, что $(\operatorname{conv} f_s)(x) = f_s(x),\ s = 1, \ldots, m,$ при $x \in C$. Так как $\sum_{s=1}^{m}\operatorname{conv} f_s : \operatorname{co} C \to R$ выпуклая функция и $\sum_{s=1}^{m} f_s(x) = \sum_{s=1}^{m}(\operatorname{conv} f_s)(x)$ при $x \in C$, то из лем-мы 4 имеем, что $\sum_{s=1}^{m} f_s : C \to R$ дискретно-выпуклая функция. Теорема доказана.

Теорема 4. Если $f_s(x),\ s \in I,$ дискретно-выпуклые функции на дискретно-выпуклом множестве C, то $f(x) = \sup_{s\in I} f_s(x)$ дискретно-выпуклая функция на множестве C.

Доказательство. Если $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, \cdots, x_k \in C,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in C,\ k \in N,$ то $f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) = \sup_{s\in I} f_s(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i)$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\nu \in I$ такое, что

$$f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) < f_\nu(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) + \varepsilon .$$

Тогда получим, что

$$f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) < f_\nu(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_\nu(x_i) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i) + \varepsilon .$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i)$ при

$$\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1,\ x_1, \cdots, x_k \in C,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \in C,\ k \in N.$$

Теорема доказана.

Отметим, что если $B \subset Z^{\infty}$ дискретно-выпуклое множество, $f: B \to R$ дис-кретно-выпуклая функция и $\alpha > 0$ число, то $\alpha f: B \to R$ дискретно-выпуклая функция.

Лемма 6. Если функция $f(x)$ дискретно-выпуклая функция на дискретно- выпуклом множестве C, то $\{x \in C : f(x) \le \lambda\}$ дискретно-выпуклое множество.

Доказательство. По лемме 3 f дискретно-выпуклая функция на множестве C в том и только в том случае, когда $f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$ при $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$

$x_1, \cdots, x_k \in C,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in C,\ k \in N.$ Если $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \ x_1, \cdots, x_k \in \{x \in C : f(x) \le \lambda\}$ и

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in C,$ то имеем, что $f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) \le \lambda$. Поэтому $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in \{x \in C : f(x) \le \lambda\}$ при $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \ x_1, \cdots, x_k \in \{x \in C : f(x) \le \lambda\},\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in Z^{\infty},\ k \in N.$ Лемма доказана.

Отметим, что если $f: Z^{\infty} \to R$ дискретная-функция, $\bar{x} \in Z^{\infty}$ и $f(\bar{x}) = \min_{x \in Z^{\infty}} f(x),$ то $\Delta f(\bar{x})(h) = f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) \ge 0$ при $h \in Z^{\infty}$. Поэтому $0 \in \partial f(\bar{x})$, где $\partial f(\bar{x}) = \{p \in (R^{\infty})^* : \Delta f(\bar{x})(h) \ge \langle p, h \rangle \text{ при } h \in Z^{\infty}\}.$

3. Целочисленная дискретно-выпуклая функция

Если $f: Z^{\infty} \to Z_{+\infty},$ где $Z_{+\infty} = Z \bigcup \{+\infty\},$ то положим $\text{zep} f = \{(x, \alpha) \in Z^{\infty} \times Z : f(x) \le \alpha\}$.

Если $\text{zep} f$ -дискретно-выпуклое множество в $Z^{\infty} \times Z$, то функцию f назовем целочисленной дискретно-выпуклой функцией.

По лемме 1 $\text{zep} f$ -целочисленно дискретно-выпуклое множество в $Z^{\infty} \times Z$, тогда и только тогда, когда $\text{zep} f = \text{co}(\text{zep} f) \bigcap (Z^{\infty} \times Z)$.

По лемме 3 $\text{zep} f$ - целочисленно дискретно-выпуклое множество в $Z^{\infty} \times Z$, тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i, \alpha_i) \in \text{zep} f$ при $\lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$ $(x_1, \alpha_1) \cdots, (x_k, \alpha_k) \in \text{zep } f,$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i, \alpha_i) \in Z^{\infty} \times Z,\ k \in N.$ Поэтому $f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i$ при $\lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$ $(x_1, \alpha_1) \cdots, (x_k, \alpha_k) \in \text{zep } f,$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i, \alpha_i) \in Z^{\infty} \times Z,\ k \in N.$ Отсюда следует, что если $\lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i, f(x_i)) \in Z^{\infty} \times Z,$ то $f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$.

Если C дискретное множество в Z^{∞} и $f: C \to Z,$ то положив

$$f_C(x) = \begin{cases} f(x) : x \in C, \\ +\infty : x \notin C \end{cases}$$

имеем, что $\text{zep} f_C = \{(x, \alpha) \in Z^{\infty} \times Z : f_C(x) \le \alpha\} = \{(x, \alpha) \in C \times Z : f_C(x) \le \alpha\}$. Поэтому, если $\text{zep} f_C$ дискретно-выпуклое множество в $Z^{\infty} \times Z,$ то функцию $f: C \to Z$ назовем целочисленной дискретно-выпуклой функцией.

Если $g: R^{\infty} \to R_{+\infty},$ где $R_{+\infty} = R \bigcup \{+\infty\},$ то положим $\text{ep} g = \{(x, \alpha) \in R^{\infty} \times R : g(x) \le \alpha\}$, $\text{zep} g = \{(x, \alpha) \in Z^{\infty} \times Z : g(x) \le \alpha\}$.

Лемма 7. Если $g: R^{\infty} \to R_{+\infty},$ то $\text{zep } g = \text{ep} g \bigcap (Z^{\infty} \times Z).$

Доказательство. Если $(x, \alpha) \in \text{zep } g$, то $(x, \alpha) \in Z^{\infty} \times Z$ и $g(x) \le \alpha$. Поэтому $(x, \alpha) \in Z^{\infty} \times Z$ и $(x, \alpha) \in \text{ep} g$. Отсюда имеем $(x, \alpha) \in \text{ep} g \bigcap (Z^{\infty} \times Z)$. Получим, что $\text{zep } g \subset \text{ep} g \bigcap (Z^{\infty} \times Z)$. Обратно, если $(x, \alpha) \in \text{ep} g \bigcap (Z^{\infty} \times Z),$ то $(x, \alpha) \in Z^{\infty} \times Z$ и

$(x,\alpha)\in epg$. Поэтому $(x,\alpha)\in zep\ g$, т.е. $epg\bigcap(Z^\infty\times Z)\subset zep\ g.$ Тогда имеем, что $zep\ g=epg\bigcap(Z^\infty\times Z).$ Лемма доказана.

Теорема 5. Если $g:Z^\infty\to Z$ дискретно-выпуклая функция, то $g:Z^\infty\to Z$ целочисленная дискретно-выпуклая функция.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция $g:Z^\infty\to Z$ дискретно- выпуклая функция, в том и только в том случае, когда

$$g(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i)\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g(x_i) \tag{4}$$

при $x_1,\cdots,x_k\in Z^\infty$, $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ и $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\in Z^\infty$, где $k\in N$.

Пусть $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $(x_1,\alpha_1)\cdots,(x_k,\alpha_k)\in zep\ g$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i,\alpha_i)\in(Z^\infty\times Z)$, $k\in N.$ Так как $g(x_i)\le\alpha_i$ при $i=1,\ldots,k$, то из (4) следует, что $g(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i)\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha_i$, т.е. $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i,\alpha_i)\in zepg$

при $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $(x_1,\alpha_1)\cdots,(x_k,\alpha_k)\in zep\ g$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i,\alpha_i)\in(Z^\infty\times Z)$, $k\in N.$ Тогда из леммы 3 имеем, что $g:Z^\infty\to Z$ целочисленная дискретно-выпуклая функция. Теорема доказана.

Если $g:R^\infty\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, то epg выпуклое множество. Так как $zepg\subset epg$, то $zep\ g\subset epg\bigcap(Z^\infty\times Z).$

Лемма 8. Если $g:Z^\infty\to Z$ дискретно-выпуклая функция, то $zep\ g=ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z).$

Доказательство. Пусть $(z,\alpha)\in zep\ g$. Тогда $(z,\alpha)\in(Z^\infty\times Z)$ и $g(z)\le\alpha$. Так как $g:Z^\infty\to Z_{+\infty}$ дискретно-выпуклая функция, то по лемме 4 имеем, что $(convg)(z)=g(z)$ при $z\in Z^\infty$. Поэтому $(z,\alpha)\in(Z^\infty\times Z)$ и $(convg)(z)\le\alpha$. Отсюда следует, что $(z,\alpha)\in ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z)$, т.е. $zep\ g\subset ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z).$

Обратно, если $(z,\alpha)\in ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z)$, то $(z,\alpha)\in ep(convg)$ и $(z,\alpha)\in(Z^\infty\times Z)$.

Поэтому $(z,\alpha)\in(Z^\infty\times Z)$ и $(convg)(z)\le\alpha$. Так как $(convg)(z)=g(z)$ при $z\in Z^\infty$, то $(z,\alpha)\in(Z^\infty\times Z)$ и $g(z)\le\alpha$. Имеем, что $(z,\alpha)\in zep\ g$, т.е. $ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z)\subset zepg$. Лемма доказана.

Лемма 9. Если $g:Z^\infty\to Z$ дискретная функция, $(convg):Z^\infty\to Z$ и $zep\ g=ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z),$ то $g:Z^\infty\to Z$ дискретно-выпуклая функция.

Доказательство. Ясно, что $(convg)(z)\le g(z)$ при $z\in Z^\infty$.

По условию $zep\ g=ep(convg)\bigcap(Z^\infty\times Z).$ Так как $(convg)(z)\in Z^\infty$ при $z\in Z^\infty$, то отсюда имеем, что $(z,\ (convg)(z))\in zep\ g.$ Тогда получим, что $g(z)\le(convg)(z)$ при $z\in Z^\infty$. Поэтому имеем, что $(convg)(z)=g(z)$ при $z\in Z^\infty.$ Тогда из леммы 4 следует, что $g:Z^\infty\to Z$ дискретно-выпуклая функция. Лемма доказана.

Результаты, полученные в Z^∞ для дискретно-выпуклой функции и дискретно-выпуклого множества, также верны для дискретно-выпуклой функции и дискретно-выпуклого множества в Z^n, где $n\in N$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору М. А.Садыгову за постановку задачи и полезные консультации.

Список литературы

1. Садыгов И. М. Дискретно-выпуклая функция и его приложение. // Austria Science, 2018. №17. С.3-8.
2. Садыгов М. А., Садыгов И. М. Сильно дискретно-выпуклая функция и ее свойства. // Проблемы науки. Москва, 2018, № 8(32). С.10-20.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функцио-нального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория.-М.: Наука, 1962.-895 р.
5. Сухарев А.Г., Тимохов А.Ф., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.- М.: Наука, 1986.-326с.