верхности стали. Пленка меди, полученная на поверхности стали в процессе металлизации, в зависимости от толщины, может оказывать на дальнейший процесс азотирования каталитический, барьерный или ингибиторный (защитный) эффект.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-33-00992.

Список используемых источников информации:

1. Met-all.org - Всё об обработке металла! Азотирование стали: назначение, технология и разновидности процесса [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://met-all.org/obrabotka/himicheskaya/azotirovanie-stali-metalla-ionnoe.html.

2. Лахтин, Ю.М. Теория и технология азотирования / Ю.М. Лахтин, Я.Д. Коган, Г.И. Шпис, З. Бёмер. - М.: Металлургия, 1991. – 320с.

3. Зефиров, Н.С. Химическая энциклопедия / Н.С. Зефиров, И.Л. Кнунянц, Н.Н. Кулов. - М.: Советская энциклопедия, 1990. - т. 2. - 337с.

4. Идатен.ру Статьи обо всем. От экономики до медицины. Каталитическая химия. Курс лекций МГУ. Носители гетерогенных катализаторов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://idaten.ru/chemistry/nositeli-geterogennih-katalizatorov.

УДК 517.93

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУБОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К НЕКОТОРЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ

Оморов Роман Оморович
Доктор техн. наук, проф., г.н.с.
Института физики им. акад. Ж. Жеенбаева НАН КР,
г.Бишкек
DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2019.1.59.28-32

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются основные положения метода топологической грубости динамических систем, основанного на понятии грубости по Андронову-Понтрягину. Метод позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем и хаоса, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления, посредством управления грубостью. Применения метода к исследованию нелинейных систем показаны на примерах нелинейного сервомеханизма и синергетической системы (цепи) Чуа.

ABSTRACT

Basic provisions of the method of topological roughness of dynamic systems based on a concept of roughness according to Andronov-Pontryagin are considered. The method allows to investigate roughness (robustness) and bifurcations of dynamic systems of various nature, in particular synergetic systems and chaos and also to synthesize rough (robust) control systems, by means of controlling of roughness. Applications of a method to a research of nonlinear systems are shown on examples of the nonlinear servomechanism and a synergetic system (chain) Chua.

Ключевые слова: грубость и робастность динамических систем, бифуркация, синергетическая система и хаос, метод топологической грубости, особая точка, число обусловленности матриц, матричное уравнение Сильвестра.

Keywords: roughness and robustness of dynamic systems, bifurcation, synergetic system and chaos, method of topological roughness, special point, number of conditionality of matrixes, matrix equation of Sylvester.

Введение. Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [2-4, 10].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову – Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε– близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [2, 3, 12].

В работе [6] на базе понятия грубости по Андронову – Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [7, 8].

В данной статье рассматривается некоторые основы «метода топологической грубости», а также приложения этого метода на примерах нелинейного сервомеханизма и синергетической системы Чуа [1, 9].

1. Основные положения метода.

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А.Пуанкаре, в частности термин бифуркация впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем. Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства).

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А.Андроновым и его школой [2, 3].

В работе [2] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [3].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

$$\dot{z}\,(t) = F(\,z\,(t)), \qquad (1)$$

где $z\,(t) \in R^n$ - вектор фазовых координат (далее обозначение времени t, если не оговорено, для краткости опускаем), F – n – мерная дифференцируемая вектор- функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову – Понтрягину в некоторой области G если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{z}} = F\,(\,\tilde{z}\,) + f\,(\,\tilde{z}\,), \qquad (2)$$

где $f\,(\,\tilde{z}\,)$ – дифференцируемая малая по какой либо норме $\|\cdot\|$ n – мерная вектор-функция, являются ε – тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n – мерном фазовом пространстве также, что $D, \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$

$$\exists\, \varepsilon,\, \delta > 0:$$

если

$$\|f\,(\,\tilde{z}\,)\| < \delta,\ \ |\,df_i\,(\,\tilde{z}\,)\,/\,d\,\tilde{z}_j\,| < \delta,\ \mathrm{i,\ j} = \overline{1,\ n},$$

то

$$|\,\|z\| - \|\,\tilde{z}\,\|\,| < \varepsilon,$$

или

$$(\,\tilde{D}\,,(2)) \equiv (D,\,(1)), \qquad (3)$$

иначе, разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [6] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности. $C\{M\}$ – матрицы M - нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости систем, на отношениях пары δ и ε.

*Определение 1***.** Грубая в области G система (1) называется максимально грубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина δ – близости систем (1) и (2), приводящая к ε – тождественности, будет (для каждого ε > 0) максимальна.

Определение 2. Негрубая в области G система (1) называется минимально негрубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина ε –тождественности систем (1) и (2), при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого δ > 0) минимальна.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в работе [6].

Теорема 1. Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (z_0) была максимальна грубой, а в окрестности негиперболической –минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:

$M^* = \mathrm{argmin}\ C\{M\}$,

где M - матрица приведения линейной части A системы (1) в особой точке (z_0) к диагональному (квазидиагональному) базису, $C\{M\}$- число обусловленности матрицы M.

Замечание 1. Как следует из определений 1 и 2, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для которых $C\{M\} = \infty$. Иначе, множество грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества. При этом, системами с $C\{M\} = \infty$ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц A.

Теоретические результаты «метода топологической грубости», полученные в работах [6-8], позволяют управлять грубостью синергетических систем, соответствующая теорема доказана в работе [6].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев разработанных в работах [7,8]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В диссертационной работе [7] доказана соответствующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы в области G многомерной ($n > 2$) ДС при значении параметра $q = q^*$,

$q \epsilon R^p$ возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:

- либо 1), в рассматриваемой области G, ДС существуют негиперболические (негрубые) особые точки (ОТ), или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство

$$C\{M(q^*)\} = \min \sum Ci \{M(q)\},\ i = 1, 2, \ldots, p \tag{4}$$

где p – количество ОТ или ПЦ в области G,

- либо 2), в области G ДС , имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие

$$C\{M(q^*)\} = \infty. \tag{5}$$

*Замечание 2***.** Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (4) или (5) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория – ОТ или ПЦ, удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания («странные аттракторы»), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (4) удовлетворяют ОТ, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (4) отвечают ПЦ.

2. Приложения метода к некоторым нелинейным системам.

Возможности метода для исследований грубости, бифуркаций и хаоса систем были апробированы на многих примерах динамических систем, в частности, на широко известных синергетических системах различной природы, таких как системы Лоренца, Ресслера, Белоусова-Жаботинского, Хенона, «хищник-жертва» и других [7, 8, 11].

В данной работе рассмотрим применение метода топологической грубости на двух системах – нелинейном сервомеханизме рассмотренном в работе [9] и синергетической системе Чуа [1].

Нелинейный сервомеханизм. Рассматривается нелинейная кусочно-гладкая система в виде нелинейного сервомеханизма, заданная уравнениями

$$\ddot{x} + \dot{x} + \gamma x = - F(\sigma),\ \sigma = x + T_1 \dot{x}, \tag{6}$$

где $\gamma = \gamma_h R/T_s^2$, $T_1 = T_s / \gamma R$ – постоянные коэффициенты, $F(\sigma)$ – обобщенная релейная функция, обусловленная зоной нечувствительности и гистерезисом (Рис. 1), σ – аргумент релейной функции.

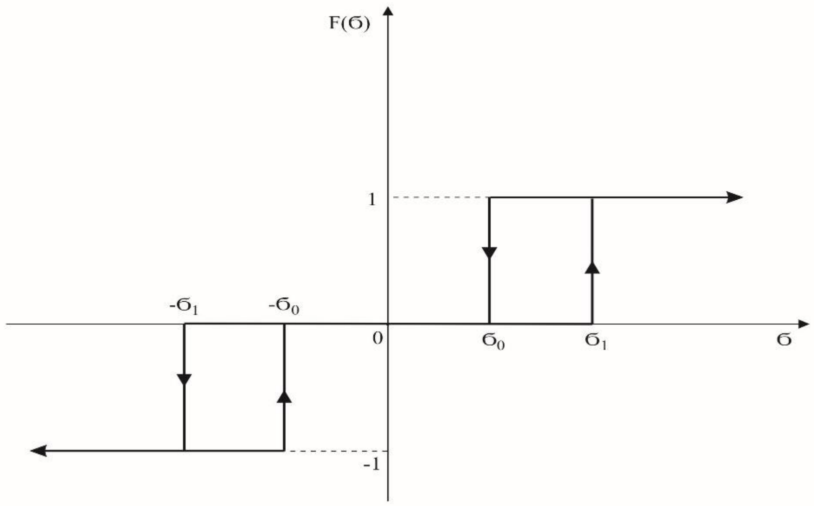

Рис. 1.

В работе [9] проведено исследование системы (6) при различных случаях первичных параметров T_s, γ_h методом многолистной фазовой плоскости и точечных преобразований [5] .

Представим систему (6) в фазовой плоскости ($x, y = \dot{x}$):

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = - \gamma x - y - F(\sigma),\ \sigma = x + T_1 y \tag{7}$$

В пространстве состояний (фазовых координат) система (7) представится структурой, показанной на Рис. 2.

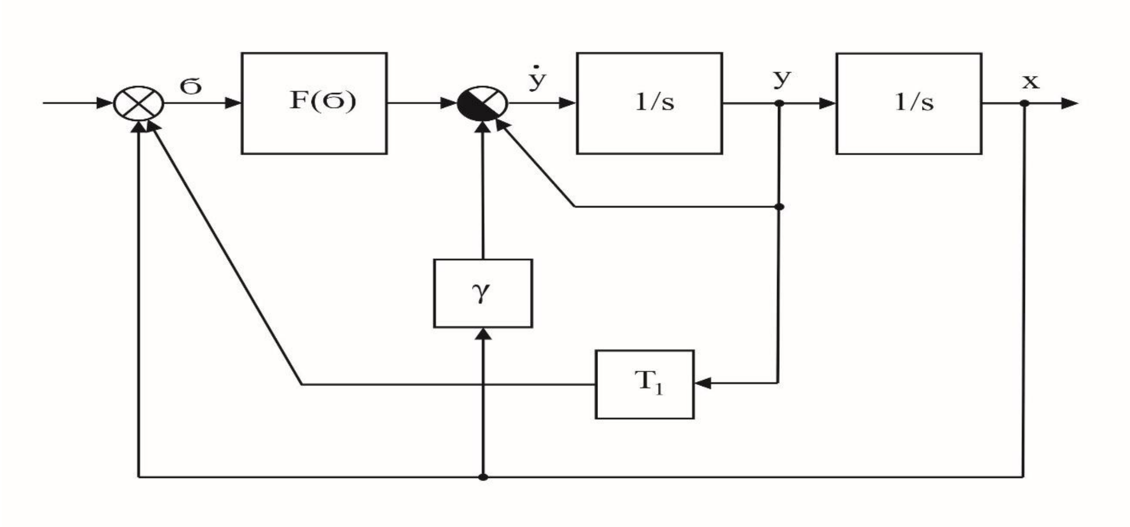

Рис. 2.

В системе (7) только одна особая точка, которая удовлетворяет соотношениям

$$y = 0\,,\ -\gamma x - F(\sigma) = 0\,,$$
т.е. $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, ОТ(0,0).

Матрица линейной части

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{1-4\gamma}/2$.

Тип особой точки ОТ(0,0) определяется величиной γ .

Если корни действительные, т.е. $1 - 4\gamma \geq 0$, $\gamma \leq$ ¼ , то имеем

$$C\{M\} = \frac{\sqrt{1 + (1+\gamma)\Big/\sqrt{1+(\gamma-1)^2}}}{\sqrt{1 - (1+\gamma)\Big/\sqrt{1+(\gamma-1)^2}}}$$

Отсюда min $C\{M\}$ будем иметь при $\gamma \to 0$, а именно $C\{M\} \to 2{,}4$ (система стремится к *максимальной грубости*), а max $C\{M\} = \infty$ будет при γ = ¼, при этом, система стремится к минимальной грубости или иначе переходит к негрубой области (неработоспособна).

Если корни комплексные, т.е. $\gamma > 1/4$, тогда min $C\{M\} = 1{,}6$ будет достигнут при $\gamma = 1{,}5$ и система будет *максимально грубой* . Максимальное значение $C\{M\} \to \infty$ при $\gamma \to \infty$ (система стремится к *неработоспособному* негрубому состоянию).

Система (цепь) Чуа. Как известно [1], синергетическая система Чуа представляет собой электронную цепь с одним нелинейным элементом. Система Чуа описывается уравнениями:

$$\dot{x} = p(y - f(x)), \dot{y} = x - y + z, \dot{z} = -qy, \quad (8)$$

где

$$f(x) = M_1 x + 0{,}5(M_1 - M_0)(|x+1| - |x-1).|$$

При

$$p = 9, q = 14{,}3, M_1 = -6/7, M_0 = 5/7\,,$$

в системе (8) наблюдаются хаотические колебания (хаос).

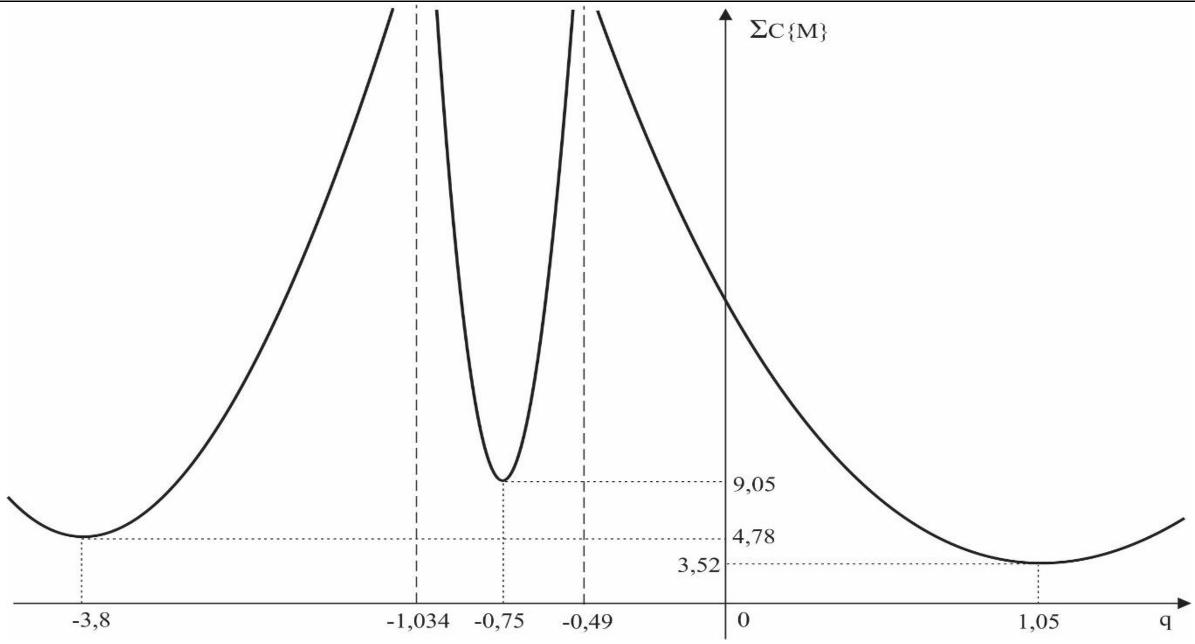

Рис. 3. Зависимость C{M} от параметра q в системе Чуа.

В данном случае, приравнивая правые части уравнений в (8) получаем три особые точки (ОТ): OT_1(0,0,0); $OT_{2,3}$(±11/6, 0, 11/6).

Вычислениями меры грубости *C{M}* при вариациях параметра q в системе (8) установлены, что хаотические движения в соответствии с (5) обнаруживаются при значениях $q: -1{,}034 < q < -0{,}49$, а при $q = -3{,}8$ и $q = 1{,}05$ наблюдается максимальная грубость движений в системе (8), что показано на Рис. 3.

Заключение. В работе рассмотрены основные положения метода топологической грубости систем, разработанной автором данной работы. Дана библиография основных публикаций автора, в которых получены фундаментальные результаты в области теории грубости и бифуркаций динамических систем в целом и синергетических систем в частности. Приложения метода к синергетическим системам и хаосу использованы для исследований многих систем, таких как аттракторы Лоренца иРесслера, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа и др. [7, 8]. В данной работе рассмотрены примеры использования метода к нелинейным системам – нелинейному сервомеханизму и синергетической системе Чуа.

Список литературы

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003, № 5. С. 3-45.

2. Андронов, А.А., Понтрягин, Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. - 1937. Т.14, - № 5. - С. 247 - 250.

3. Аносов, Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). М.: Наука, 1985. - С. 59 - 93.

4. Джури, Э.И. Робастность дискретных систем //Автоматика и телемеханика. 1990. - №5. - С. 3 - 28.

5. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. - 471 с.

6. Оморов, Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36 - 45.

7. Оморов, Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Автореферат диссертации доктора технических наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1993. - 38 с.

8. Оморов, Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. 1997. № 2. С. 26 - 36.

9. Петров В.В., Гордеев А.А. Нелинейные сервомеханизмы. М.: Машиностроение, 1979. - 471 с.

10. Поляк, Б.Т., Цыпкин, Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 3 – 31.

11. Хакен, Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. - 423 с.

12. Peixoto, M.M. On structural stability // Ann. .Math. - 1959. Vol. 69, N 1. P. 199 -222.